Chapitre I : Suites et récurrence

Principe de récurrence :

-Prédicat : Un prédicat est une phrase ou une expression qui peut être vraie ou fausse en fonction des valeurs des variables qu'elle contient. Par exemple, "x est pair" est un prédicat qui sera vrai si x est pair, sinon il sera faux.
-Exemple : On veut montrer que la suite (u_n) définie par u_0=1 et pour tout n ∈ ℕ par u_{n+1}=2u_n +1 est strictement croissante sur ℕ. On note p_n la proposition, u_{n+1}>u_n.

-Initialisation : L'initialisation, c'est là où l'on montre que la propriété que l'on veut prouver est vraie pour la plus petite valeur possible de l'entier concerné, généralement 0 ou 1. C'est comme le point de départ de la preuve.
-Exemple : u_0=1 et u_1=2x1+1=3 donc u_1>u_0 et P_0est vraie.

-Hérédité : L'hérédité suppose que la propriété est vraie pour un certain entier k (l'hypothèse de récurrence) et montre ensuite qu'elle doit également être vraie pour k+1. Soit en utilisant directement P_k, soit en « construisant » P_{k+1}. Cela garantit que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir de l'initialisation.
-Exemple : On suppose que P_k est vraie pour un certain k ∈ ℕ et montrons que P_{k+1} est vraie, à savoir u_{k+2}>u_{k+1}
Au rang k+1 :
Par hypothèse de récurrence : u_{k+1}>u_k, donc 2u_{k+1}>2u_k
et 2u_{k+1}+1>2u_k+1 soit u_{k+2}>u_{k+2}
Ainsi Pu_{k+1} est vraie.

-Conclusion : On conclut que la proposition p_n est vraie pour tout entier n avec n ≥ n_0.
-Exemple : La proposition est initialisée au rang n=0 et est héréditaire donc un est strictement croissante sur ℕ.

Comportement global d'une suite :

Sens de variation d'une suite :

-Une suite (un) est **croissante** si pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$.
-Une suite (un) est **décroissante** si pour tout entier naturel n : $u_n \geq u_{n+1}$.
-Une suite est **monotone** si elle est soit (toujours) croissante, soit (toujours) décroissante.
-Une suite est dite **constante** si, pour tout entier naturel n, un+1=un.

Méthodes pour étudier les variations d'une suite :

1. Méthode fonctionnelle : Si u_n=f (n) , on étudie le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[
   1. si f est croissante alors la suite (u_n) est croissante.
   2. si f est décroissante alors la suite (u_n) est décroissante.
2. Méthodes algébriques :
   1. Etudier le signe de u_{n+1}-u_n; si u_{n+1}-$u_n \geq 0$ alors la suite est croissante.
   2. Si u_n>0, pour tout n, comparer le rapport .$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ; si .$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ > 1alors la suite est croissante.
3. Méthode par récurrence : Elle s'applique à une suite (u_n) définie par u_{n+1}=f(u_n)

On montre la propriété P(n) : $u_{n+1} \geq u_n$ pour montrer que la suite est croissante

Suite majorée, suite minorée :

On dit qu'une suite (u_n) définie sur ℕ est :
- majorée s'il existe M ∈ ℝ tel que n ∈ ℕ, $u_n \leq$ M, on dit que M est un majorant de (u_n).
- minorée s'il existe m ∈ ℝ tel que n ∈ ℕ, u_n≤m, on dit que m est un minorant de (u_n).
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.