Suites et récurrence *Géométrie espace*	**Corrigé du Contrôle n°2** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : *(10 pts)*

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basket ball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- Durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- Chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- Chaque année, 10% des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

$$a_1 = a_0 - \frac{15}{100} \times a_0 + \frac{10}{100} \times b_0 = 1700 - \frac{15}{100} \times 1700 + \frac{10}{100} \times 1300 = 1575$$
$$b_1 = b_0 - \frac{10}{100} \times b_0 + \frac{15}{100} \times a_0 = 1300 - \frac{10}{100} \times 1300 + \frac{15}{100} \times 1700 = 1425$$

2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation reliant a_n et b_n.
Comme le nombre de sportifs est de 3 000, qu'aucun sportif ne quitte le groupe et que le groupe est formé uniquement des clubs A et B, alors pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 3000$

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :
$$a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300$$

D'après les deux phrases :

- Durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- Chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;

On en déduit que : $a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100} \times a_n + \frac{10}{100} \times b_n$ et $a_n + b_n = 3000$

Donc $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}1 \times (3000 - a_n) = 0{,}75a_n + 300$

Ainsi pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$$
Quelles informations donnent ceci pour la suite (a_n).

<u>Prédicat</u> $P(n)$: Pour tout entier naturel n ; $1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $1\,200 \leq a_1 = 1\,575 \leq a_0 = 1\,700 \leq 1\,700$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k pour lequel la proposition $P(k)$ est vraie.

Au rang $k+1$: Par hypothèse de récurrence $1\,200 \leq a_{k+1} \leq a_k \leq 1\,700$

$$0{,}75 \times 1\,200 \leq 0{,}75a_{n+1} \leq 0{,}75a_n \leq 0{,}75 \times 1\,700$$

$$0{,}75 \times 1\,200 + 300 \leq 0{,}75a_{n+1} + 300 \leq 0{,}75a_n + 300 \leq 0{,}75 \times 1\,700 + 300$$

$$1\,200 \leq a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 1\,575 \leq 1700$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n=0$, elle est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n, à savoir $1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700$.

Ce qui veut dire que la suite est décroissante et bornée par 1 200 et 1 700.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\,200$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

On calcule :

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 1\,200 = 0{,}75a_n + 300 - 1\,200 = 0{,}75a_n - 900 = 0{,}75(a_n - 1\,200) = 0{,}75v_n$$

Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison 0,75 et de terme initial

$$v_0 = a_0 - 1\,200 = 1\,700 - 1\,200 = 500$$

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

Comme la suite est géométrique $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 500 \times 0{,}75^n = 500 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

   c. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Comme $v_n = a_n - 1\,200$, alors $a_n = v_n + 1\,200$, d'après la question précédente :

$$a_n = 500 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\,200$$

6. Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la liste des termes de la suite (a_n) de a_0 à a_{10}.

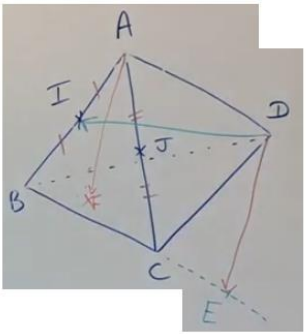
```python
def suite():
    n = 0
    A = 1700
    print(A)
    for i in range(10):
        n = n+1
        A = 0.75*A+300
        print(A)
```

Exercice 2 : *(4 pts)*

Soit ABCD un tétraèdre. Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

Soit E le point tel que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et soit F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

a) Faire une figure.



b) Sans repère, montrer que $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ}$

$$\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} - 2 \times \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$$

$$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{2}\left(2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ}\right) = 3\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 3\overrightarrow{IJ}$$

c) En déduire que les points D, I, J et F sont coplanaires.

Comme $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IJ}$, alors $\overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{DJ}$ donc $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{DJ}$

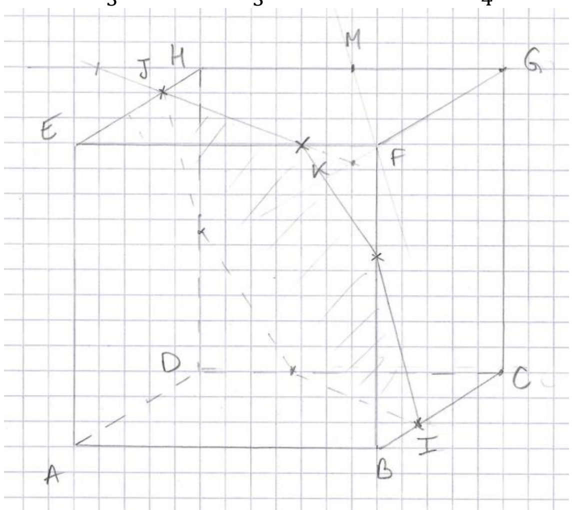
Ainsi $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{DF} + 3\overrightarrow{DJ}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont coplanaires donc les points D, I, J et F sont coplanaires

<u>**Exercice 3**</u> : *(4 pts)*

ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

1. a) Réaliser une figure avec AB = 6 cm et la compléter avec les points I, J, K tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AJ} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AK} = \tfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$



b) Calculer les coordonnées des points I, J et K.

Les composantes de $\overrightarrow{AI}$ sont $(1\,;\frac{1}{3}\,;0)$ donc I a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$

Les composantes de $\overrightarrow{AJ}$ sont $(0\,;\frac{2}{3}\,;1)$ donc J a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$

Les composantes de $\overrightarrow{AK}$ sont $(\frac{3}{4}\,;0\,;1)$ donc K a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)$

c) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} 0-1 \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-1 \\ 0-\frac{1}{3} \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{-3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Soit L est un point de l'arête [CD], de coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ; 1\ ; 0\right)$.
   Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme

On calcule les composantes de $\overrightarrow{IL}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-1 \\ 1-\frac{1}{3} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et les composantes de $\overrightarrow{KJ}$ $\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3}-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme les deux vecteurs ont les mêmes composantes alors ils sont égaux $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$ et le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

3. Démontrer que les droites (IJ) et (BH) sont sécantes

Les vecteurs directeurs des droites (IJ) et (BH) ont pour composantes $\overrightarrow{IJ}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme les coordonnées ne sont pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Soit O le milieu de [IJ], il a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}\ ;\ \frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\ ; \frac{1}{2}\ ; \frac{1}{2}\right)$

Soit T le milieu de [BH], il a pour coordonnées $\left(\frac{1+0}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\ ; \frac{1}{2}\ ; \frac{1}{2}\right)$

Ils ont les mêmes coordonnées, ce sont les mêmes points donc les droites (IJ) et (BH) sont sécantes en O.

4. Soit M le milieu de [GH]. La droite (MF) est-elle parallèle au plan (IJK) ?

La droite (MF) est parallèle au plan (IJK) lorsque le vecteur $\overrightarrow{MF}$ est coplanaires à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$

On suppose que $\overrightarrow{MF}$ soit combinaison linéaire à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$

Il existe x, y deux réels tels que $\overrightarrow{MF} = x\,\overrightarrow{IJ} + y\,\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{MF}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cela donne système à résoudre :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = x \times (-1) + y \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ -1 = x \times \frac{1}{3} + y \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ 0 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = -x - \frac{y}{4} \\ -3 = x - y \\ 0 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = -x - \frac{y}{4} \\ 2x = -3 \\ 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \neq -\frac{1}{2} \\ x = -3/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

Comme ce système n'a pas de solution, alors cette combinaison linéaire n'existe pas et la droite (MF) n'est pas parallèle au plan (IJK)

Lien figure

Exercice 4 : **(2 pts)** BONUS (à faire en dernier)

Vrai ou faux : Justifier votre réponse

« Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs deux à deux non colinéaires alors ces vecteurs sont non coplanaires. »

FAUX.

Prendre $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, ils ne sont pas colinéaires deux à deux mais $\vec{w}$ est combinaison linéaire des deux autres donc les vecteurs sont coplanaires.