Vendredi 10 novembre 2023

Suites et récurrence *Géométrie espace*	**Contrôle de maths n°2 – Rattrapage** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : *(9 pts)*

Alain dépose 5 000 € sur un compte en banque le 1er janvier 2019.
Chaque mois, il dépense le quart de ce qu'il a sur son compte.
De plus, à la fin de chaque mois, il dépose 2 000 € supplémentaires sur son compte.
On note u_n la somme sur son compte le 1er jour du mois., n mois après janvier 2019.

1. Donner la valeur de u_0 et u_1.

En janvier 2019 : $u_0 = 5\,000$

En février 2019 : $u_1 = 5\,000 - \frac{5\,000}{4} + 2\,000 = 5\,750$

2. Justifier, par des phrases, que pout tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 2\,000$$

Au n+1-ième mois après janvier 2019 : pout tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n}{4} + 2\,000 = \frac{3}{4}u_n + 2\,000 = 0{,}75\,u_n + 2\,000$$

3. a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$.

Prédicat $P(n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 5\,000 \leq u_1 = 5\,750 \leq 8\,000$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k tel que $P(k)$ soit vraie.

Au rang $k+1$: Par hypothèse de récurrence

$$u_k \leq u_{k+1} \leq 8\,000$$
$$0{,}75u_n \leq 0{,}75u_{n+1} \leq 0{,}75 \times 8\,000$$
$$0{,}75u_n + 2\,000 \leq 0{,}75u_{n+1} + 2\,000 \leq 6\,000 + 2\,000$$
$$u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 8\,000$$

Ainsi $P(k+1)$ est vraie

Conclusion : la propriété est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire, donc vraie pour tout entier naturel n.

b) Que veut dire ces inégalités pour la suite (u_n) ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$;
cela veut dire que la suite (u_n) est croissante et majorée par 8 000.

4. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n - 8\,000$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On calcule : $v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000 = 0{,}75\,u_n + 2\,000 - 8\,000 = 0{,}75u_n - 6\,000 = 0{,}75\left(u_n - \frac{6000}{0{,}75}\right)$

$$v_{n+1} = 0{,}75(u_n - 8\,000) = 0{,}75v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$
et de terme initial $v_0 = u_0 - 8\,000 = 5\,000 - 8\,000 = -3\,000$

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$ alors $v_n = v_0 \times q^n = -3000 \times 0{,}75^n$

c) Donner l'expression de u_n en fonction de n

Comme $v_n = u_n - 8\,000$ alors $u_n = v_n + 8\,000 = -3000 \times 0{,}75^n + 8\,000$

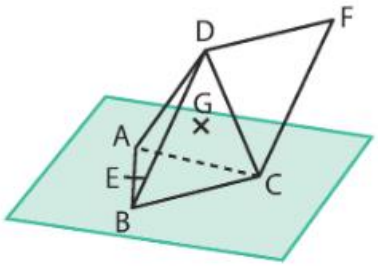
5. Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la liste des termes de la suite (u_n) de u_0 à u_{20}.

```
def suite():
    n = 0
    U = 5000
    print(U)
    for i in range(20):
        n = n+1
        U = 0.75*U+2000
        print(U)
```

```
5000
5750.0
6312.5
6734.375
7050.78125
7288.0859375
7466.064453125
7599.54833984375
7699.6612548828125
7774.745941162109
7831.059455871582
7873.2945919036865
7904.970943927765
7928.728207945824
7946.546155959368
7959.909616969526
7969.932212727144
7977.449159545358
7983.086869659019
7987.315152244264
7990.486364183198
```

Exercice 2 : *(5 pts) Sans repérage*

On considère un tétraèdre ABCD et E le milieu de [AB].



On place F tel que BCFD soit un parallélogramme et le point G centre de gravité du triangle ACD avec $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

1. Faire une figure
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FD}$
   Comme BCFD est un parallélogramme, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FD}$
   $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD}$
3. Démontrer que $\overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$

G centre de gravité du triangle ACD donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ par la relation de Chasles

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ en regroupant les termes

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ par la relation de Chasles

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CB}$

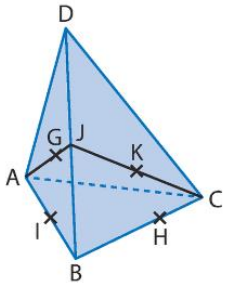
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$ car $2\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$ car E milieu de [AB].

4. En déduire que les points E, F et G sont alignés.
   Comme $\overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{GF} = -2\overrightarrow{GE}$, les vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires donc les points G, E et F sont alignés.

5. Préciser la position du point G sur la droite (EF).
   Comme $\overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$ alors $3\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$
   Ainsi G est au tiers de [EF] en partant de E.

Exercice 3 : *(6 pts) Avec repérage*



On considère un tétraèdre ABCD, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BD] et [CJ].

Les points G et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \text{ et } \overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, G et H dans le repère $(B\ ;\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$
   - I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, I a pour coordonnées $\left(0\ ;0\ ;\frac{1}{2}\right)$
   - J milieu de [BD] donc $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, J a pour coordonnées $\left(0\ ;\frac{1}{2}\ ;0\right)$
   - Le point C a pour coordonnées $(1\ ;0\ ;0)$ et J a pour coordonnées $\left(0\ ;\frac{1}{2}\ ;0\right)$

     K est le milieu de [CJ], ses coordonnées sont $\left(\frac{1+0}{2}\ ;\ \frac{0+\frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{4}\ ;0\right)$
   - $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ ainsi $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

     Donc G a pour coordonnées $\left(0\ ;\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3}\right)$
   - $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc H a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;0\ ;0\right)$

2. Les points I, K, G et H sont-ils coplanaires ? Justifier.

   Si les points I, K, G et H sont coplanaires, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IG} + b\overrightarrow{IH}$

$\overrightarrow{IK}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -1/2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IG}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IH}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Avec les coordonnées, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 0\times a + \frac{2}{3}b \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\times a + 0\times b \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}\times b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4} \\ a = \frac{1}{4}\times 3 = \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{6}\times\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme les valeurs de a et b vérifient la 3ère équation, alors le système admet une solution $a = b = \frac{3}{4}$

Ainsi $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{IH}$ donc les points I, K, G et H sont coplanaires.

Figure Geogebra : lien