



Mercredi 15 novembre 2023

Limites de suites	Corrigé du Contrôle de mathématiques n°3 – 1h Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé
-------------------	---	------------------------

Exercice 1 : (10 pts) Déterminer les limites suivantes, par une méthode appropriée.

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6n^3 + 4n^2 - 7}{2n^3 + 5n - 4}$,

C'est une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

On factorise par n^3 au numérateur et au dénominateur

$$\frac{-6n^3 + 4n^2 - 7}{2n^3 + 5n - 4} = \frac{n^3(-6 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^3})}{n^3(2 + \frac{5}{n^2} - \frac{4}{n^3})} = \frac{-6 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{5}{n^2} - \frac{4}{n^3}}$$

Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -6 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^3} = -6 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{5}{n^2} - \frac{4}{n^3} = 2 \end{cases}$ donc par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6n^3 + 4n^2 - 7}{2n^3 + 5n - 4} = -\frac{6}{2} = -3$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 2) \left(\frac{2}{n} - 3 \right)$

$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} - 3 = -3 \end{cases}$ donc par produit et en appliquant la règle des signes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 2) \left(\frac{2}{n} - 3 \right) = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{7}{n+1}$

$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n+1} = 0 \end{cases}$ donc par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{7}{n+1} = 3$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^2 - 5n + \frac{1}{n}$

C'est une forme indéterminée de la forme $\infty - \infty$.

On factorise par n^2 : $6n^2 - 5n + \frac{1}{n} = n^2 \left(6 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$

$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 = 6 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \end{cases}$ donc par somme et produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^2 - 5n + \frac{1}{n} = +\infty$



e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3}$

C'est une forme indéterminée de la forme « $\infty - \infty$ », on utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3} = \frac{(\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3})(\sqrt{n^3 + 3} + \sqrt{n^3})}{(\sqrt{n^3 + 3} + \sqrt{n^3})} = \frac{n^3 + 3 - n^3}{\sqrt{n^3 + 3} + \sqrt{n^3}} = \frac{3}{\sqrt{n^3 + 3} + \sqrt{n^3}}$$

Or $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3 + 3} + \sqrt{n^3} = +\infty \end{cases}$ donc par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3} = 0$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7n + \sin(2n)$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $-1 \leq \sin(2n) \leq 1$

$$\text{Donc } 7n - 1 \leq 7n + \sin(2n) \leq 7n + 1$$

On pose $v_n = 7n - 1$, on a que $v_n \leq 7n + \sin(2n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7n + \sin(2n) = +\infty$

Exercice 2 : (4 pts)

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 4}$

- 1) Expliquer pourquoi on ne peut déterminer la limite de cette suite directement par les opérations sur les limites ?
- 2) Sans récurrence, montrer que pour tout n ; $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n + 2)^2$
- 3) En déduire que pour tout $n \geq 1$; $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$
- 4) En déduire la limite de la suite (u_n)

1) Comme $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 4} = +\infty \end{cases}$, on est en présence de la forme indéterminée $0 \times \infty$

On ne peut donc pas déterminer la limite de cette suite avec les opérations sur les limites.

- 2) On sait que $0 \leq 4$ donc $n^2 + 0 \leq n^2 + 4$ et $n^2 \leq n^2 + 4$
Comme $n \geq 0$ alors $n^2 + 4n + 4 \geq n^2 + 4$ or $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$
Donc $n^2 + 4 \leq (n + 2)^2$
On en conclut que pour tout $n \geq 0$, $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n + 2)^2$

- 3) pour tout $n \geq 0$, $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n + 2)^2$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq \sqrt{(n + 2)^2}$$

Comme $n \geq 0$, $\sqrt{n^2} = n$ et comme $n + 2 \geq 0$, $\sqrt{(n + 2)^2} = n + 2$

Alors $n \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq n + 2$

Et pour $n \geq 1$, $1 \leq \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 4} \leq \frac{n+2}{n}$ donc $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$



4) On pose $v_n = 1$ et $w_n = 1 + \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ et $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout $n \geq 1$

Alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 3 : (6 pts)

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Pour une affirmation vraie avec une démonstration et pour une affirmation fausse avec un contre-exemple.

On considère une suite (u_n) , définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ telle que $v_n = -\frac{2}{u_n}$

a) Si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.

Faux : On prend $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

or $v_n = -\frac{2}{\frac{1}{n}} = -2n$ et (v_n) diverge vers $-\infty$.

b) Si (u_n) est minorée par 2 alors (v_n) est minorée par -1.

Vrai : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$ donc $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante.

$-\frac{2}{u_n} \geq -2 \times \frac{1}{2} = -1$ car on multiplie par un nombre négatif.

Ainsi $v_n \geq -1$, la suite (v_n) est minorée par -1.

c) Si (u_n) est décroissante alors (v_n) est croissante.

Faux : On prend $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$,

la suite est décroissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \leq 0$

et $v_n = -\frac{2}{\frac{1}{n}} = -2n$ est aussi une suite décroissante car $v_{n+1} - v_n = -2(n+1) + 2n = -2 \leq 0$

d) Si (u_n) est divergente alors (v_n) converge vers zéro.

Faux : On prend $u_n = (-1)^n$, c'est une suite divergente, elle n'a pas de limite.

Et $v_n = -\frac{2}{u_n} = -\frac{2}{(-1)^n}$ n'a pas de limite non plus, donc elle est aussi divergente.

Attention une suite qui diverge ne tend pas nécessairement vers l'infini !