

# LIMITES DE SUITES

Une suite  $(u_n)$  a pour limite un réel  $L$  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $L$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit : Pour tout réel  $\epsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  tel que pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in ]L - \epsilon ; L + \epsilon[$ .

On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

On dit que la suite converge vers  $L$  !

## Définition d'une limite finie et infinie d'une suite

### Limites de suites de référence

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
  - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout entier  $k \geq 1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Une suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou que la suite diverge vers  $+\infty$  signifie que tout intervalle ouvert de la forme  $]A ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang  $N$ . C'est-à-dire, pour tout entier  $n \geq N$ ,  $u_n > A$ .

On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

## Théorèmes

### Théorème d'encadrement dit théorème des gendarmes (admis)

$(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont trois suites.

Si pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et si les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers la même limite  $L$ , alors la suite  $(v_n)$  converge vers  $L$ .

### Théorème

- Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$

### Limites et comparaison - théorème de comparaison

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites. Si pour tout entier naturel  $n \geq n_0$

- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

### Théorème limites de suites géométriques

On considère un réel  $q$ . La suite  $(q^n)$  des puissances de  $q$  converge si et seulement si  $-1 < q \leq 1$ . On a :

- Si  $q > 1$ , alors la suite  $(q^n)$  diverge vers  $+\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si  $q = 1$ , alors la suite  $(q^n)$  est constante, de limite 1
- Si  $-1 < q < 1$ , alors la suite  $(q^n)$  converge vers zéro :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si  $q \leq -1$ , alors la suite  $(q^n)$  diverge et n'admet pas de limite

### Théorème de la majoration d'une suite convergente

Si la suite  $(u_n)$  est croissante et admet pour limite  $L$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq L$

Si la suite  $(u_n)$  est décroissante et admet pour limite  $L$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq L$

### Théorème de convergence d'une suite monotone (admis) - théorème de la limite monotone

- Toute suite croissante majorée est convergente
- Toute suite décroissante minorée est convergente

## Opérations et Limites

Somme de deux suites :

|                                            |          |           |           |           |           |             |
|--------------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$       | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$       | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$   |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>F.I.</b> |

Produit de deux suites :

|                                                 |               |                                                         |                                                         |                        |
|-------------------------------------------------|---------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$            | $l$           | $l \neq 0$                                              | $+\infty$ ou $-\infty$                                  | <b>0</b>               |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$            | $l'$          | $+\infty$ ou $-\infty$                                  | $+\infty$ ou $-\infty$                                  | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$ | $l \times l'$ | $+\infty$ ou $-\infty$<br>(règle des signes du produit) | $+\infty$ ou $-\infty$<br>(règle des signes du produit) | <b>F.I.</b>            |

Quotient de deux suites :

|                                                  |                |                        |                        |                                                         |             |                        |
|--------------------------------------------------|----------------|------------------------|------------------------|---------------------------------------------------------|-------------|------------------------|
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$             | $l$            | $l$                    | $+\infty$ ou $-\infty$ | $l \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$                    | <b>0</b>    | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$             | $l' \neq 0$    | $+\infty$ ou $-\infty$ | $l' \neq 0$            | <b>0</b> (!)                                            | <b>0</b>    | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$ | $\frac{l}{l'}$ | <b>0</b>               | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$<br>(règle des signes du produit) | <b>F.I.</b> | <b>F.I.</b>            |

Forme indéterminée :

Une forme indéterminée est un cas où on ne peut pas conclure directement !

Il existe 4 formes indéterminées :

|                   |                   |                         |               |
|-------------------|-------------------|-------------------------|---------------|
| $\infty - \infty$ | $0 \times \infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------------|---------------|