Chapitre V : Limites de fonctions

Définition d'une asymptote horizontale

On dit que la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

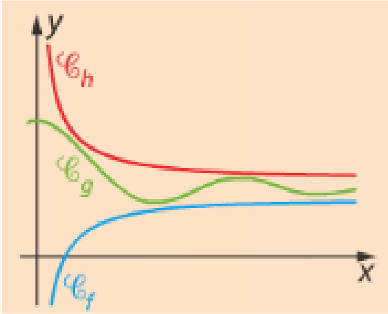
elle est asymptote à la courbe en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Théorème "des gendarmes" ou d'encadrement

f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]A\,;\ +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$),

Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite L en $+\infty$

à savoir si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$



Théorème de comparaison à l'infini

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]A\,;\ +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$)
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème de croissance comparée

Pour tout entier non nul n, on a

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et par passage à l'inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Limites de fonctions de référence (par coeur)

Fonction	définie sur ...	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0\,;\ +\infty[$	non définie	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	0	$+\infty$

Règles pour la somme

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x)+v(x)) =$	$L+L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Règles pour le produit

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L $(L \neq 0)$	L $(L \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim\limits_{x \to a} (u(x) \times v(x)) =$	$L \times L'$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Règles pour le quotient

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) =$	L	L $(L \neq 0)$	L	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} v(x) =$	L' $(L' \neq 0)$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x)}{v(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	F.I.	