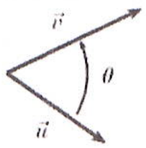
Orthogonalité et distances dans l'espace

Définition produit scalaire dans le plan

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

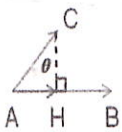
- Si A, B, C sont trois points du plan, alors : $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.



Propriété : vecteurs orthogonaux.

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété avec le projeté orthogonal.



- Soient trois points A, B et C avec A et B distincts. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH} = AB \times AH$ si même sens ou $\vec{AB}.\vec{AC} = \vec{AB}.\vec{AH} = -AB \times AH$ si sens contraire.

Définition repère orthonormé dans le plan.

- Une base orthonormée du plan est la donnée de deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que :
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ (vecteurs de norme 1)
- $\vec{i}.\vec{j} = 0$ (vecteurs orthogonaux)

Un repère orthonormé est la donnée d'un point origine et d'une base orthonormée.

Expression analytique du produit scalaire

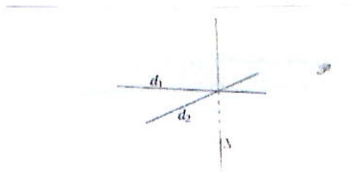
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

En particulier : $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Propriété

- Une droite est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan



Propriété : orthogonalité vecteurs

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Distance entre deux points

- La distance entre deux points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ est :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Mesure d'un angle

- Pour trois points A, B et C de l'espace distincts deux à deux :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{AB \times AC}$$