Exercice 1 : 5 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul, réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$

   b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

   c) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

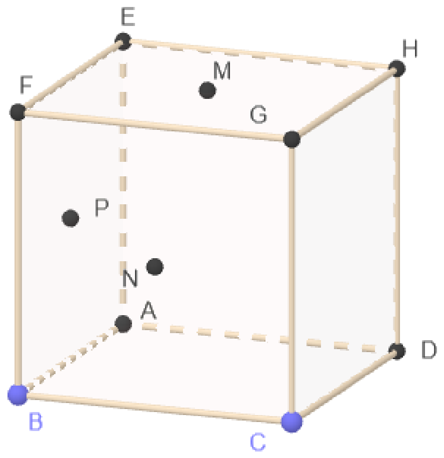
$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$$

   c) Calculer la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

Exercice 2 : 5 points

Dans un cube ABCDEFGH de côté 1, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

On considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Calculer les coordonnées des points D, F, M, N et P.

2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{NP}$.

3. Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (MNP).

4. Soit T le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (MNP). Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur la droite (DF).

5. En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DN}$, déterminer la distance du point D au plan (MNP).

6. On note I le milieu de [PN].
   a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux

   b. En déduire l'aire du triangle MNP.

7. En déduire le volume du tétraèdre DMNP.

Exercice 3 : **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$$

Cette suite :

a) Diverge vers $+\infty$ b) converge vers 0

c) Converge vers $\frac{2}{5}$ d) converge vers $\frac{1}{3}$

Question 2 :

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b+e^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels. On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

a) $a = 2\ et\ b = 3$ b) $a = 4\ et\ b = \frac{4}{3}$

c) $a = 4\ et\ b = 1$ d) $a = 6\ et\ b = 2$

Question 3 :

On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

Question 4 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points A(-1 ; 2 ; 5), B(3 ; 6 ; 3) et C(3, 0, 9).

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés. ABC est un triangle :

a) isocèle rectangle en A b) isocèle rectangle en B

c) isocèle rectangle en C d) équilatéral

Exercice 4 : **3 points**

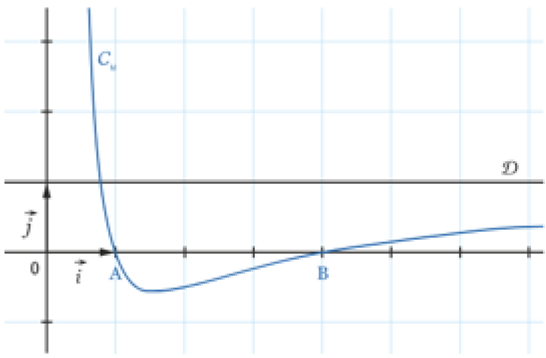
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on désigne par C_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

Où a, b et c sont des nombres réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe C_u et la droite (D) d'équation $y = 1$.

On précise que la courbe C_u passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite (D) sont asymptotes à la courbe C_u.



1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$.

Exercice 5 : **3 points**

Dire, pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse.
Si elle est vraie, justifier la réponse, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Si une fonction f est strictement positive alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) Si une fonction f est telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

c) Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;\,+\infty[$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	-3	↗	$+\infty \parallel +\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.