<u>Corrigé du Baccalauréat Blanc</u>

Jeudi 14 décembre 2023

<u>Exercice 1 :</u> 5 points

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16}$$

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul, réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

   La formule est : $= \frac{3}{4} * B2 + \frac{1}{4} * A2 + 1$

   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

D'après le tableau, la suite semble être croissante

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$

<u>Prédicat</u> : $P(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n \leq n + 1$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $0 \leq u_0 = 1 \leq 0 + 1 = 1$, $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang k tel que $P(k)$ soit vraie.

Au rang $k + 1$: Par hypothèse de récurrence $n \leq u_n \leq n + 1$

Donc $\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 1)$ et $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}(n + 1) + \frac{1}{4}n + 1$

$$n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{3}{4} + 1 \leq n + 2$$

Ainsi $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : La proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n.

b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

On sait que pour tout entier naturel n, $n \leq u_n \leq n + 1$, donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$

On en déduit que $n \leq u_n \leq n + 1 \leq u_{n+1}$, ainsi $u_n \leq u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite est croissante.

De plus comme : $u_n \geq n$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$

On sait que pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ donc $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

On pose $v_n = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$

Comme $v_n \leq \frac{u_n}{n} \leq w_n$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

On calcule $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4} v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ avec pour terme initial $v_0 = u_0 - 0 = 1$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$, donc $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Comme $v_n = u_n - n$, alors $u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$

   c) Calculer la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

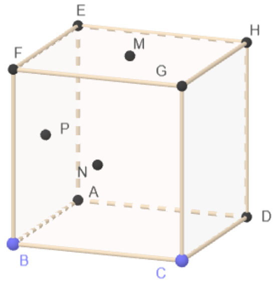
$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{3}{4} < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2 : 5 points

Dans un cube ABCDEFGH de côté 1, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

On considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Calculer les coordonnées des points D, F, M, N et P.

$D(0\,;1\,;0)\,;\,F(1\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $M\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $N\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $P\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{NP}$.

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\0-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{MP} = 1\times 0 + (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{NP} = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times 0 = 0$$

3. Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (MNP).

Comme $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{MP} = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux

Et comme $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{NP} = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont orthogonaux

Or $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur de la droite (DF) et les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont des vecteurs non colinéaires, directeurs du plan (MNP), on en déduit qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan donc la droite (DF) est orthogonale au plan (MNP).

4. Soit T le point d'intersection de la droite (DF) et du plan (MNP). Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur la droite (DF).

Il faut montrer que la droite (TN) est perpendiculaire à la droite (DF).

La droite (TN) est une droite du plan (MNP) car les deux points T et N sont dans le plan.

Comme la droite (DF) est orthogonale au plan (MNP) alors elle est orthogonale à toute droite du plan. Ainsi (DF) est orthogonale à la droite (TN).

De plus, T est un point de la droite (DF) et de la droite (NT) donc les droites (TN) et (DF) sont perpendiculaires. Par conséquent, T est le projeté orthogonal de N sur la droite (DF).

5. En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DN}$, déterminer la distance du point D au plan (MNP).

La distance du point D au plan (MNP) correspond à la longueur DT car (DT) est orthogonale au plan (MNP) et T est l'intersection de la droite et du plan.

Les coordonnées de $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 1-0 \\ \frac{1}{2}-1 \\ \frac{1}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par le calcul dans le repère : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DN} = 1 \times 1 + (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} = 2$

Comme T est le projeté orthogonal de N sur la droite (DF)

Par la formule avec le projeté orthogonal : $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DN} = DF \times DT$

$$DF = \sqrt{(1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Ainsi $DF \times DT = 2$ donc $DT = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

6. On note I le milieu de [PN].
   a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux

Soit I le milieu de [PN], ses coordonnées sont $I\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\ ;\ \frac{\frac{1}{2}+0}{2}\ ;\ \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}\ ;\frac{1}{4}\ ;\frac{1}{2}\right)$

Les coordonnées de : $\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

On calcule : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{PN} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$

Comme le produit scalaire est nul, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux.

   b. En déduire l'aire du triangle MNP.

Comme la droite (MI) est orthogonale à la droite (PN) alors (MI) est la hauteur du triangle MNP issue de M.

$$A_{MNP} = \frac{PN \times MI}{2}$$

$$PN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ MI = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$A_{MNP} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

7. En déduire le volume du tétraèdre DMNP.

$$V_{DMNP} = \frac{1}{3} A_{MNP} \times DT = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{12}$$

<u>Exercice 3</u> : **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 : Réponse B

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier naturel par :

$$u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$$

Cette suite :

a) Diverge vers $+\infty$ — b) converge vers 0

c) Converge vers $\frac{2}{5}$ — d) converge vers $\frac{1}{3}$

Question 2 : Réponse D

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \frac{a}{b+e^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels. On sait que $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 3$. Les valeurs de a et b sont :

a) $a = 2\ et\ b = 3$ — b) $a = 4\ et\ b = \frac{4}{3}$

c) $a = 4\ et\ b = 1$ — d) $a = 6\ et\ b = 2$

Question 3 : Réponse B

On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.
```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.
```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.
```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.
```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

Question 4 : Réponse A

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(0\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(-1 ; 2 ; 5), B(3 ; 6 ; 3) et C(3, 0, 9)
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés. ABC est un triangle :

a) isocèle rectangle en A
b) isocèle rectangle en B
c) isocèle rectangle en C
d) équilatéral

Exercice 4 : 3 points

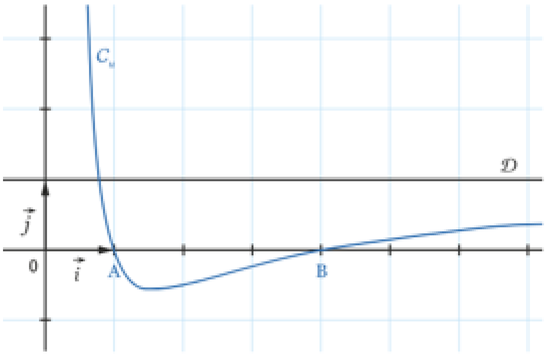
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par C_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

Où a, b et c sont des nombres réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe C_u et la droite (D) d'équation $y = 1$.

On précise que la courbe C_u passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite (D) sont asymptotes à la courbe C_u.



1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

Comme la courbe passe par le point A(1 ; 0) alors $u(1) = 0$

Comme la courbe passe par le point B(4 ; 0) alors $u(4) = 0$

2. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} a = a$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{x^2} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = a$

Or la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$.

On en déduit que $a = 1$.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$

Grâce aux résultats des deux questions précédentes, on obtient le système :

$$\begin{cases} u(1) = 0 \\ u(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{b}{1} + \dfrac{c}{1^2} = 0 \\ 1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{4^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 4b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

Ainsi $u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2}$

4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 5x + 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0+} x^2 = 0+ \end{cases}$ donc par quotient $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+} u(x) = +\infty$

Exercice 5 : 3 points

Dire, pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse.
Si elle est vraie, justifier la réponse, si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Si une fonction f est strictement positive alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Affirmation fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^2 + 1$; $f(x) \geq 1 > 0$ pour tout x réel, or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Si une fonction f est telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

Affirmation fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3 - x^2$

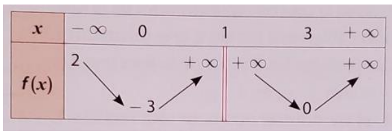
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ mais la fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$$

La fonction est croissante sur $]-\infty\,; 0] \cup [\frac{2}{3}\,;\, +\infty[$ et décroissante sur $[0\,; \frac{2}{3}]$

c) Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $]-\infty\,; 1[\cup]1\,;\,+\infty[$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.



Affirmation vraie.

D'après le tableau, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$ alors La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.