

Compléments sur la dérivation et convexité

Qu'est-ce qu'une fonction composée ?

Définition : fonction composée
Soit g une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x de I , $u(x) \in J$ La fonction composée de u par g , notée $g \circ u$ est définie pour tout $x \in I$ par : $(g \circ u)(x) = g(u(x))$ On peut aussi écrire : $g \circ u : x \rightarrow u(x) \rightarrow g(u(x))$

Comment calculer sa limite ?

Théorème : limite d'une fonction composée (admis)
Soient g et u deux fonctions telles que $g \circ u$ soit définie sur un intervalle I . Soient a, b, c trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$ Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ u(x) = c$

Comment la dériver ?

Théorème : Dérivée d'une fonction composée (admis)
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$ alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x)) = g \circ u(x)$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$

Exemples:

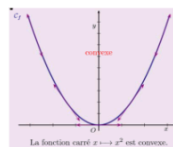
Théorème : Dérivée d'une fonction à la puissance n
u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel
- Si $n \geq 2$, alors la fonction u^n est dérivable sur I alors $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$ - Si $n < 1$, pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ alors $(u^{-n})' = -n \times u' \times u^{-n-1}$ - Si $n = 1$, pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ alors $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Qu'est-ce qu'une dérivée seconde ?

Définition : dérivée seconde d'une fonction
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa dérivée. Si f' est elle aussi dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelée dérivée seconde de f .

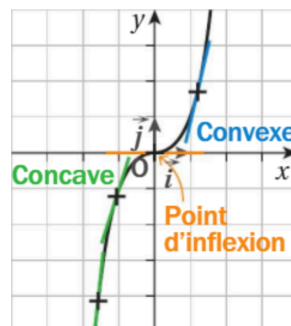
Définition : fonction convexe
- Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. - Une fonction f est dite concave sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.



Théorème des fonctions concaves (admis)	Théorème des fonctions convexes (admis)
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I	Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I

Qu'est-ce qu'un point d'inflexion ?

Définition : point d'inflexion d'une courbe
A est un point d'inflexion de la courbe représentative C_f d'une fonction f si C_f traverse sa tangente en A
Propriété
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a , si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a .



En complément sur la convexité:

Propriétés : Inégalités de convexité (admis)
- Si f est convexe sur un intervalle I, alors pour tous nombres a, b de I, on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ce qui se traduit par : l'image du milieu de $[a; b]$ est inférieur au milieu des images $f(a)$ et $f(b)$ la propriété reste vraie pour tout point du segment $[a; b]$ - Si f est concave sur un intervalle I, alors pour tous nombres a, b de I, on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

