Vendredi 19 janvier 2024

Etude fonctions	**Corrigé du Contrôle de mathématiques n°4 – 105 min** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : 4 pts

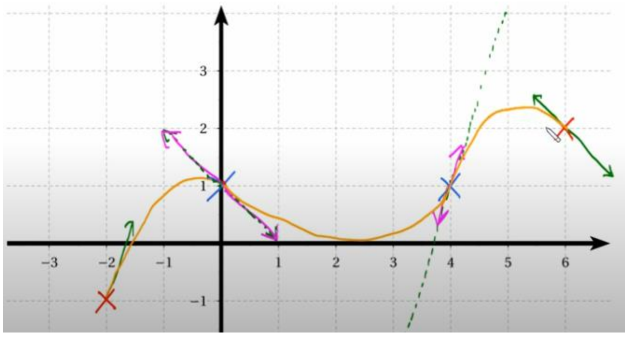
On considère une fonction f définie et dérivable sur [-2 ; 6].
On donne le tableau de variation de la fonction dérivée f'.

x	-2		0		4		6
$f'(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

1. Déterminer la convexité de la fonction f. Justifier les réponses.

Comme la fonction f' est décroissante sur $[-2\,;0] \cup [4\,;6]$ alors f est concave sur $[-2\,;0] \cup [4\,;6]$.
Comme la fonction f' est croissante sur $[0\,;4]$ alors f est convexe sur $[0;4]$.
Comme la fonction change de convexité aux points d'abscisses 0 et 4 alors la courbe admet deux points d'inflexion d'abscisses 0 et 4.

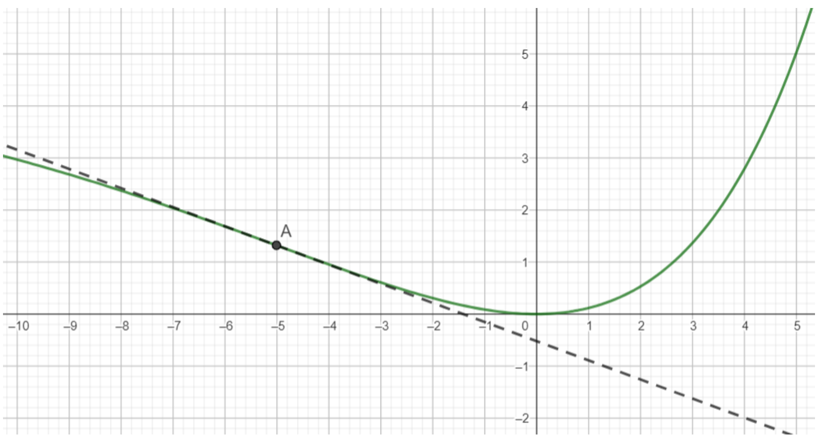
2. Sachant que $f(0) = 1$ et que $f(4) = 1$, tracer une courbe susceptible de représenter f dans le repère suivant :



<u>Exercice 2</u> : 10 pts

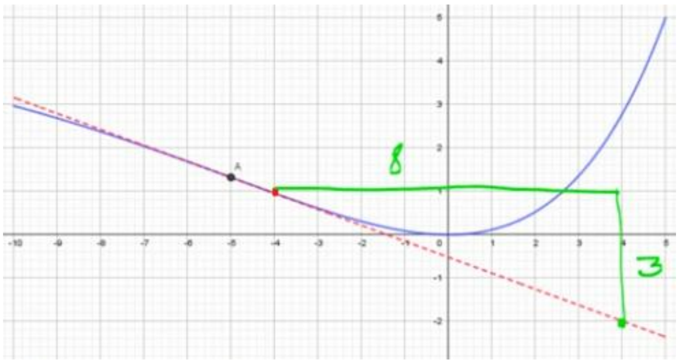
Sur la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

- La Courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-10 ; 5]
- La tangente T à C_f au point A d'abscisse -5



Partie A : lecture graphique

1. Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T par lecture graphique.



Par lecture graphique :

$$coef \approx -\frac{3}{8} = -0{,}375$$

2. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et sur lequel elle semble être concave.

La fonction semble être concave sur [-10 ; -5] car les tangentes sont au-dessus de la courbe et semble être convexe sur [-5 ; 5] car les tangentes sont en-dessous de la courbe.

Partie B : Par le calcul

La fonction f précédente, définie et dérivable sur [-10 ; 5] a pour expression

$$f(x) = (x-5)e^{0,2x} + 5$$

3. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [-10 ; 5]. Montrer que $f'(x) = 0{,}2xe^{0,2x}$

f est de la forme $uv + 5$, avec :

$$\begin{cases} u(x) = x - 5 \\ v(x) = e^{0,2x} \end{cases} \text{donc} \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = 0{,}2e^{0,2x} \end{cases}$$

Ainsi $f'(x) = 1 \times e^{0,2x} + (x-5)0{,}2e^{0,2x} + 0 = 0{,}2xe^{0,2x}$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-10 ; 5]. Justifier les réponses.

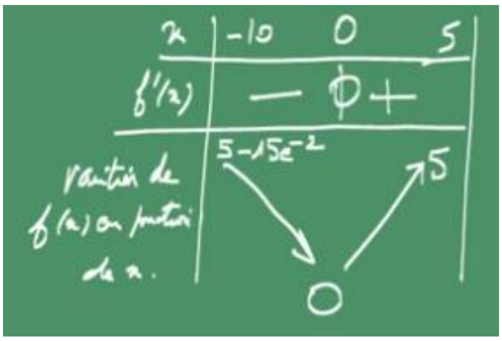
Pour étudier les variations de la fonction f, on étudie le signe de sa dérivée.

$$f'(x) = 0{,}2xe^{0,2x}$$

Or pour tout réel x, $e^{0,2x} > 0$, donc le signe de f' dépend du signe de $0{,}2x$.

Comme $0{,}2x \geq 0 \iff x \geq \frac{0}{0{,}2} \iff x \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$ sur [0 ; 5] et $f'(x) \leq 0$ sur [-10 ; 0].

Tableau de variation de la fonction f :



$$f(-10) = -15e^{-2} + 5 = -\frac{15}{e^2} + 5$$

$$f(0) = -5e^0 + 5 = 0$$

$$f(5) = (5-5)e^{0,2\times 5} + 5 = 5$$

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse -5.
   Donner les valeurs exactes des coefficients.

Une équation de la tangente en $x = -5$ est : $y = f'(-5)(x+5) + f(-5)$

$$f'(-5) = 0{,}2 \times (-5)e^{0{,}2\times(-5)} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}368$$

$$f(-5) = (-5-5)e^{0{,}2\times(-5)} + 5 = -\frac{10}{e} + 5 \approx 1{,}32$$

Donc $y = -\frac{1}{e}(x+5) - \frac{10}{e} + 5 = -\frac{1}{e}x - \frac{5}{e} - \frac{10}{e} + 5 = -\frac{1}{e}x - \frac{15}{e} + 5$

Conclusion : une équation de la tangente T en A est : $y = -\frac{1}{e}x - \frac{15}{e} + 5$

6. On note f'' la dérivée seconde de f sur l'intervalle [-10 ; 5]. Calculer f''.

$$f'(x) = 0{,}2xe^{0{,}2x}$$

Cette fonction est dérivable sur [-10 ; 5] car composée de fonctions dérivables.

f' est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = 0{,}2x \\ v(x) = e^{0{,}2x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 0{,}2 \\ v'(x) = 0{,}2e^{0{,}2x} \end{cases}$

$$f''(x) = 0{,}2e^{0{,}2x} + 0{,}2x \times 0{,}2e^{0{,}2x} = (0{,}2 + 0{,}04x)e^{0{,}2x}$$

7. Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [-10 ; 5], sans oublier les éventuels points d'inflexion.

Pour tout réel x, $e^{0{,}2x} > 0$, donc le signe de f'' dépend du signe de $(0{,}2 + 0{,}04x)$.

On résout :

$$0{,}2 + 0{,}04x \geq 0 \iff 0{,}04x \geq -0{,}2 \iff x \geq -\frac{0{,}2}{0{,}04} = -5$$

On en déduit que :

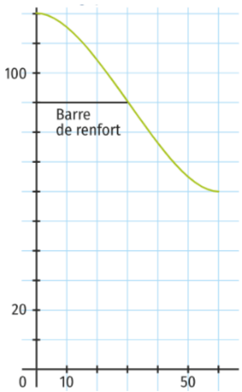
- $f''(x) \geq 0$ sur [-5 ; 5] , la fonction est convexe sur [-5 ; 5]
- $f''(x) \leq 0$ sur [-10 ; -5], la fonction est concave sur [-10 ; -5]

Comme la dérivée seconde s'annule en $x = -5$ et change de signe alors la courbe admet un point d'inflexion en $x = -5$ soit au point A.

<u>Exercice 3 :</u> 6 pts

Une commune des Alpes demande à un ingénieur de modéliser le futur tremplin de saut à ski avec les contraintes suivantes :

- Les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales
- La fonction qui modélise le tremplin est définie sur [0 ; 60] par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
  Avec a, b, c, d des réels



1. Déterminer la fonction dérivée f' sur [0 ; 60] en fonction de a, b, c et d.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

La fonction est un polynôme du 3e degré donc dérivable sur [0 ; 60].

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

2. Donner les valeurs numériques de $f'(0)$ et $f'(60)$.

Comme les tangentes au départ du tremplin et à l'arrivée sont horizontales alors $f'(0) = f'(60) = 0$

3. Par lecture graphique, donner les valeurs numériques de $f(0)$ et $f(60)$.

Par lecture graphique : $f(0) = 120$ et $f(60) = 60$.

4. Déduire des questions précédentes les valeurs de a, b, c et d. Donner l'expression de f.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(60) = 0 \\ f(0) = 120 \\ f(60) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0 \\ 3a \times 60^2 + 2b \times 60 + c = 0 \\ a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 120 \\ a \times 60^3 + b \times 60^2 + c \times 60 + d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 10800a + 120b = 0 \\ d = 120 \\ 216000a + 3600b + 60c + d = 60 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 120 \\ 10800a + 120b = 0 \\ 216000a + 3600b = -60 \end{cases} \begin{cases} c = 0 \\ d = 120 \\ a = \dfrac{1}{1800} \\ b = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{1800}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + 120$

5. Etudier la convexité de f sur [0 ; 60].

Pour étudier la convexité de la fonction, on étudie le signe de la dérivée seconde de f.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

D'après la question précédente : $f''(x) = \frac{6}{1800}x - \frac{2}{20} = \frac{1}{300}x - \frac{1}{10}$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{300}x - \frac{1}{10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{300}x \geq \frac{1}{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{300}{10} = 30$$

Ainsi la fonction est convexe sur [30 ; 60] car $f''(x) \geq 0$ sur cet intervalle.

Et donc f est concave sur [0 ; 30] car $f''(x) \leq 0$ sur cet intervalle.

6. Déterminer la longueur de la barre de renfort horizontale qui devra toucher le tremplin au point d'inflexion. A quelle hauteur devra-t-elle être placée ?

La dérivée seconde s'annule et change de signe en $x = 30$, donc la courbe admet un point d'inflexion en $x = 30$. Par conséquent, la longueur de la barre est de 30.

On calcule : $f(30) = \frac{1}{1800} \times 30^3 - \frac{1}{20} \times 30^2 + 120 = 90$

La barre sera placée à une hauteur de 90.