



Espace Probabilités	Corrigé du Contrôle de mathématiques n°5 Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé
------------------------	--	------------------------

Exercice 1 : 10 pts

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateaux à voile et bateaux à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou moteur, est loué avec un pilote.

On sait :

- 60% des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20% prennent l'option PILOTE.
- 42% des clients prennent l'option PILOTE.

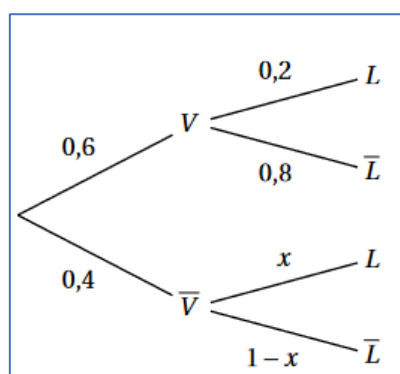
On choisit au hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client choisit un bateau à voile »
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.



2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.

$$P(V \cap \bar{L}) = P(V) \times P_V(\bar{L}) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(V \cap L) + P(\bar{V} \cap L) = P(V) \times P_V(L) + p = 0,6 \times 0,2 + p = 0,42$$

$$\text{Donc } 0,12 + p = 0,42 \text{ ainsi } p = 0,42 - 0,12 = 0,3$$

4. En déduire $P_{\bar{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.

$$\text{On sait que : } P(\bar{V} \cap L) = P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(L) = 0,3 \text{ donc } P_{\bar{V}}(L) = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$$



5. Un client a pris l'option PILOTE.

Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à 0,01 près.

$$\text{On calcule : } P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,12}{0,42} = \frac{2}{7} \approx 0,29$$

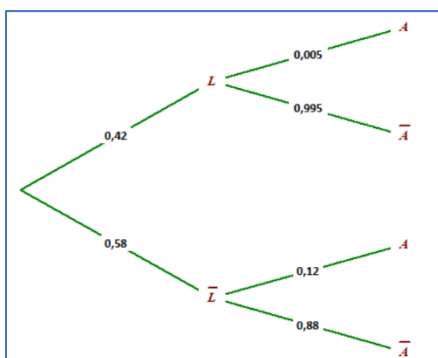
Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'événement : « son bateau subit une avarie »

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\bar{L} \cap A)$.

On considère un nouvel arbre de probabilité :



$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0,42 \times 0,005 = 0,0021$$

$$P(\bar{L} \cap A) = P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(A) = 0,58 \times 0,12 = 0,0696$$

2. L'entreprise loue 1 000 bateaux. A combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(L \cap A) + P(\bar{L} \cap A) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est de 0,0717.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à environ 72 avaries.

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres. Justifier la réponse.

L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard un client et elle possède deux issues (prendre le pilote et ne pas prendre le pilote), elle est répétée de manière identique et indépendante 40 fois. Elle est modélisée par un schéma de Bernoulli.

On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients choisissant l'option Pilote, elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,42$.

2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'exactement 25 clients prennent l'option PILOTE.

$$P(X = 25) = \binom{40}{25} 0,42^{15} (1 - 0,42)^{40-25} \approx 0,004$$

3. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

D'après la calculatrice : $P(X \geq 15) \approx 0,768$

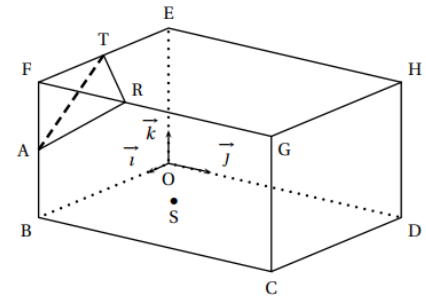


Exercice 2 : 10 pts

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6m, de longueur 8m et de hauteur 4m.

Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $OB = 6\text{m}$, $OD = 8\text{m}$ et $OE = 4\text{m}$.

On utilise le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6 ; 0 ; 2)$, $R(6 ; 3 ; 4)$ et $T(3 ; 0 ; 4)$. Enfin S est le point de coordonnées $(3 ; \frac{5}{2} ; 0)$.

1. a) Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

$$AR = \sqrt{(6-6)^2 + (3-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$AT = \sqrt{(3-6)^2 + (0-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$$

Ainsi $AR=AT$ donc le triangle ART est isocèle en A.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AR}$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} 6-6 \\ 3-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AT}$ a pour composantes : $\begin{pmatrix} 3-6 \\ 0-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le repère est orthonormé donc $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

c) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

D'après la formule du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT})$$

$$4 = \sqrt{13} \times \sqrt{13} \times \cos(\widehat{RAT})$$

On en déduit que : $\cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{13}$; donc $\widehat{RAT} = \text{Arccos}\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$

2. a) Justifier que le vecteur $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur normal au plan (ART).

Les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ ne sont pas colinéaires car leurs composantes ne sont pas proportionnelles.

Ils forment une base du plan (ART).

On calcule :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 - 2 \times 3 + 3 \times 2 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) - 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$, comme il est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ART) alors il est orthogonal au plan (ART).



b) En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

Comme le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ART) c'est un vecteur normal de ce plan.

Une équation cartésienne de ce plan est : $2x - 2y + 3z + d = 0$

Le point A est un point du plan (ART) donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 \times 6 - 2 \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -18$$

Ainsi une équation cartésienne du plan (ART) est : $2x - 2y + 3z - 18 = 0$

3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) passant par S.

Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ .

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Le rayon est modélisé par une droite Δ orthogonale au plan (ART) donc un vecteur directeur de cette droite est un vecteur normal au plan, par exemple $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Cette droite passe par le point S $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 0 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ART).

Calculer les coordonnées du point L.

L est le point d'intersection du plan (ART) et de la droite Δ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan et le système paramétrique de la droite Δ .

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 0 + 3k \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases}$$

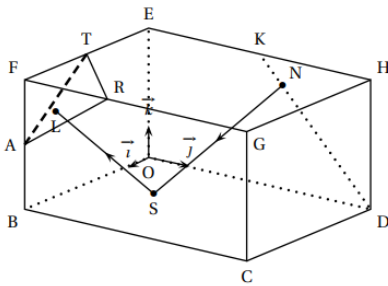
On obtient :

$$2(3 + 2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3(3k) - 18 = 0 \Leftrightarrow 17k - 17 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} x = 3 + 2 \times 1 = 5 \\ y = \frac{5}{2} - 2 \times 1 = \frac{1}{2} \\ z = 0 + 3 \times 1 = 3 \end{cases} \text{ donc L a pour coordonnées } (5; \frac{1}{2}; 3)$$



4. L'artiste installe un rail représenté par le segment $[DK]$ où K est le milieu du segment $[EH]$. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment $[DK]$ et il oriente ce second rayon laser vers le point S .



- a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$, le point N de coordonnées $(0 ; 8 - 4t ; 4t)$ est un point du segment $[DK]$.

Les coordonnées de $E(0 ; 0 ; 4)$, $D(0 ; 8 ; 0)$, $H(0 ; 8 ; 4)$

N est un point du segment $[DK]$ lorsque :

- D, N et K sont alignés
- N est entre D et K soit $\overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NK} \leq 0$

K est le milieu de $[EH]$, ses coordonnées sont $\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{0+8}{2} ; \frac{4+4}{2}\right) = (0 ; 4 ; 4)$

- Pour $t \in [0 ; 1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DN}$ ont pour composantes :

$$\overrightarrow{DK} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-8 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DN} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 8-4t-8 \\ 4t-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$$

On voit que $\overrightarrow{DN} = t\overrightarrow{DK}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les points D, N et K sont alignés.

- Pour $t \in [0 ; 1]$, les vecteurs $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{DN}$ ont pour composantes :

$$\overrightarrow{NK} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-(8-4t) \\ 4-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4+4t \\ 4-4t \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ND} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 8-4t-8 \\ 4t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

On calcule : $\overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NK} = 0 \times 0 + (-4 + 4t) \times 4t + (4 - 4t) \times (-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t - 1)$

Comme $t \in [0 ; 1]$, alors $t - 1 \leq 0$ et donc $\overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NK} \leq 0$

On en conclut que N est un point du segment $[DK]$.

- b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires.

Le vecteur $\overrightarrow{SL}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 5-3 \\ 1-5 \\ 2-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{SN}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-4t-5 \\ 4t-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3-4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires donc les vecteurs $\overrightarrow{SL}$ et $\overrightarrow{SN}$ sont orthogonaux alors $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$

$$\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow 20t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17}{20}$$

Le point N a pour coordonnées $\left(0 ; 8 - 4 \times \frac{17}{20} ; 4 \times \frac{17}{20}\right) = \left(0 ; \frac{23}{5} ; \frac{17}{5}\right)$