Chapitre VII : Géométrie analytique dans l'espace

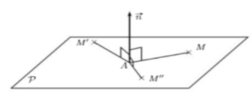
Qu'est-ce qu'une équation cartésienne de plan et qu'est-ce qu'un plan ?

Caractérisation d'un plan et équation cartésienne de plan

Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan P.



Réciproquement : Soient trois réels $a,\ b,\ c$ non tous les trois nuls en même temps.
L'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$

Propriété d'un point appartenant à un plan

Propriété : Appartenance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, $M(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$ appartient au plan P de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ et d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ si et seulement si $ax_M + by_M + cz_M + d = 0$

Les différentes positions relatives de deux plans

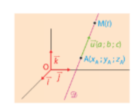
Position relative de deux plans

- Deux plans P_1 et P_2 de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont parallèles ssi $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Deux plans P_1 et P_2 de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$

Comment représenter une droite de façon paramétrique

Représentation paramétrique d'une droite

Soit D une droite passant par le point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$
Un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à D ssi il existe un réel t tel que :



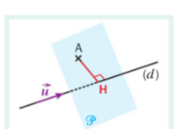
$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Ce système est appelé une représentation paramétrique de la droite D passant par $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a\,;\,b\,;\,c)$
Le réel t s'appelle le paramètre du point M.

Propriété du projeté orthogonale d'un point sur une droite

Propriété

Si (d) est une droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_0 + ta, t \in \mathbb{R} \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$



Soit A un point de l'espace et $H\,(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur la droite (d), alors :

- le plan P passant par A et orthogonal à la droite (d) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$
- le triplet $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de (d) et l'équation cartésienne de P.

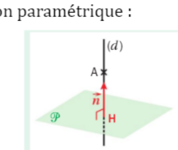
Propriété du projeté orthogonale d'un point sur un plan

Propriété

Si P est un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$; $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ est un point de l'espace et $H\,(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$ le projeté orthogonal du point A sur le plan P alors :

- la droite (d) passant par A et orthogonale au plan P admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$



- le triplet $(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H)$est l'unique triplet vérifiant à la fois la représentation paramétrique de (d) et l'équation cartésienne de P.