Corrigé du bac blanc 2024

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

0,5

1. $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{0 - 4}{0 + 3} = -\dfrac{4}{3}$

$u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python; on la complète de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

0,5

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
      u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.

0,5

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $]-3\,;\,+\infty[$.

Sur $]-3\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

1

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_1 = -\frac{4}{3}$; donc on a; $-2 < u_1 \leqslant u_0$.

  La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$, on se place ans l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$.
  Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante donc :

  $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

  $f(-2) = \dfrac{-(-2) - 4}{-2 + 3} = -2$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

  Donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ équivaut à $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

  On a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on a donc : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. On a vu que :

- pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante;
- pour tout n, $-2 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

0,5

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

On remarque que, pour tout n, $u_n > -2$ entraîne $u_n + 2 > 0$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ existe pour tout n et est strictement positive (donc non nulle).

0,25

a. $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{u_n+3}{u_n+2}$

0,75

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n+2} - \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{u_n+2}{u_n+2} = 1$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$.

c. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0{,}5$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 + n \times r = 0{,}5 + n$.

0,5

$v_n = \dfrac{1}{u_n+2} \iff \dfrac{1}{v_n} = u_n + 2 \iff u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$ donc $u_n = \dfrac{1}{n+0{,}5} - 2$, pour tout n.

0,5

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+0{,}5) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+0{,}5} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$.

<u>Exercice 2</u> :

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2)

0,5

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; −1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; $2-t$).
Alors $\text{BM}^2 = (t-4)^2 + (4)^2 + (2-t)^2 = 2t^2 - 12t + 36 = 2(t^2 - 6t + 18)$.
BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2 - 6t + 18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un minimum en $t = -\dfrac{b}{2a}$

1

ici BM sera donc minimale pour $t = 3$ soit pour M(3 ; 3 ; −1).

0,5

b. **Solution :** $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.

0,5

On a alors $\mathscr{A}_{\text{BCD}} = \dfrac{1}{2} \times \text{CD} \times \text{BH} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$ (en u. a.).
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2.

3. **a. Solution :**

0,5

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC} = -8+4+4 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 8+0-8 = 0$.

$\overrightarrow{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. Solution :

0,5

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x+y+2z+d=0$.

C(0 ; 3 ; 2) appartient à (BCD) donc $2x_C+y_C+2z_C+d=0$ ce qui donne $d=-7$.

Finalement (BCD) : $2x+y+2z-7=0$.

c. Solution : Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

0,5

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 4+2t \end{cases}$$

d. Solution : I est un point de (BCD) donc $2x_I+y_I+2z_I-7=0$

De plus $I\in\Delta$ donc il existe un réel t tel que

0,5

$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\dfrac{2}{3}$.

On en déduit $I\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

4. **Solution :** Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.

0,5

$AI=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=2.$

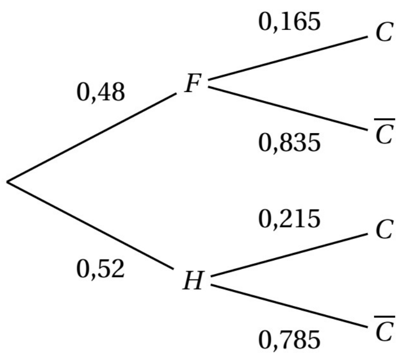
$\mathcal{V}_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times AI\times\mathcal{A}_{BCD}=8$ (en cm^3).

Le volume du tétraèdre est 8 cm^3.

Exercice 3 :

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :

0,5



0,25

2. Calculons $p(C\cap F)$: $p(C\cap F)=p_F(C)\times p(F)=0,165\times 0,48=0,0792$

0,5
3. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $p(C)$:

$p(C) = p(C \cap F) + p\left(C \cap \overline{F}\right) = p_F(C) \times p(F) + p_{\overline{F}}(C) \times p\left(\overline{F}\right) = 0,165 \times 0,48 + 0,215 \times 0,52 = 0,191$.

0,5
b. Si les évènements F et C sont indépendants, alors $p(F \cap C) = p(F) \times p(C)$.

$p(F \cap C) = 0,0792$ et $p(F) \times p(C) = 0,48 \times 0,191 = 0,09168$.

Ces deux résultats sont différents. Les évènements F et C ne sont pas indépendants.

0,5
4. D'après la formule de Bayes : $p_C(F) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,0792}{0,191} \approx 0,4147$.

La probabilité de choisir une femme sachant qu'elle est cadre est égale à 0,4147.

1,25
5. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 15 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres dans l'échantillon, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$: $X \sim \mathscr{B}(15\,;\,0,191)$

0,5
b- $P(X=5) = \binom{15}{5}\, 0,191^5\, (1-0,191)^{10} \approx 0,0917$

0,25
c ~~**b.**~~ $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \dbinom{15}{0} \times 0,191^0 \times (1-0,191)^{15} + \dbinom{15}{1} \times 0,191^1 \times (1-0,191)^{15-1} \approx 0,1890$.

0,25
d ~~**c.**~~ $E(X) = n \times p = 15 \times 0,191 = 2,865$.

0,5
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.. Cherchons la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff \iff 1 - p(X < 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - p(X = 0) \geqslant 0,99 \iff -p(X = 0) \geqslant -0,01 \iff p(X = 0) \leqslant 0,01 \iff (1 - 0,191)^n \leqslant 0,01 \iff 0,809^n \leqslant 0,01$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$0,809^n \leqslant 0,01 \iff \ln\left(0,809^n\right) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,809) \leqslant \ln(0,01)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)}$ car $\ln(0,809) < 0$.

À la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \approx 21,73$ donc $n \geqslant 22$.

Il faudra donc que la taille de l'échantillon choisi soit supérieure ou égale à 22.

Exercice 4 :

Partie A

0,5
1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$.

$\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$.

0,75
2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\,;\,4]$ à valeurs dans $[-68\,;\,37]$. Or $0 \in [-68\,;\,37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

0,25
3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

0,5
4. D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\,;\,4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\,;\,4]$ (car $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $1+x^2 \neq 0$).

0,75 $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (1+x^2) - \mathrm{e}^x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+1)}{(1+^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2}$.

   b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(1+^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2\,\mathrm{e}^x \iff (x-1)^2 \iff x-1=0 \iff x=1$.

0,75 Et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

2. **a.** Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

0,5
   - convexe sur $[-3\,;\,0]$;
   - concave sur $[0\,;\,1]$;
   - convexe sur $[1\,;\,4]$.

   Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x=0$ et $x=1$.
   Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

   b. $\forall x \in [-3\,;\,4]$: $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$

   Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\,;\,4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.
   $\forall x \in [-3\,;\,4]$, $\left(1+x^2\right)^3 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.
   On construit alors le tableau de signe suivant :

1

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   La fonction f'' s'annule et change de signe en $x=\alpha$ et $x=1$. Donc $\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.