Vendredi 05 avril 2024

Fonction logarithme népérien	**Corrigé du Contrôle de mathématiques n°6 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : 6 pts

a) Préciser l'ensemble de définition puis résoudre l'équation suivante : $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln(3)$

Propriété : Une fonction $x \to \ln(u(x))$ est définie lorsque $u(x)>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Pour que ces fonctions soient définies, on doit avoir $x-1>0$ et $x-3>0$

Soit $x>1$ et $x>3$ donc l'ensemble de définition est $]3\,;\ +\infty[$

- $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln(3)$ ssi $\ln\big((x-1)(x-3)\big)=\ln(3)$

On compose par la fonction exponentielle : $\exp(\ln\big((x-1)(x-3)\big)=\exp(\ln(3))$

Donc $(x-1)(x-3)=3$ ssi $x^2-4x+3=3$ ssi $x^2-4x=0$ ssi $x(x-4)=0$

C'est une équation-produit nulle, un produit est nul ssi l'un des facteurs est nul :

$x=0$ ou $x=4$, or $x=0$ ne fait pas partie de l'ensemble de définition donc $S=\{4\}$

Vérification : si $x=4$, $\ln(4-1)+\ln(4-3)=\ln(3)+\ln(1)=\ln(3)$

b) Exprimer en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$

$$A=\ln(15)-3\ln(8) \qquad B=ln\left(\frac{50}{3e}\right)+\ln(60)$$

$$A=\ln(15)-3\ln(8)=\ln(3\times 5)-3\ln(2^3)=\ln(3)+\ln(5)-3\times 3\ln(2)=\ln(3)+\ln(5)-9\ln(2)$$

$$B=ln\left(\frac{50}{3e}\right)+\ln(60)=\ln(50)-\ln(3e)+\ln(60)=\ln(2\times 5^2)-\ln(3)-\ln(e)+\ln(2^2\times 3\times 5)$$

$$B=\ln(2)+2\ln(5)-\ln(3)-1+2\ln(2)+\ln(3)+\ln(5)=3\ln(2)+3\ln(5)-1$$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n>0{,}99$$

$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n>0{,}99$ ssi $1-0{,}99>\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ssi $\ln(0{,}01)>ln(\left(\frac{3}{4}\right)^n)$ ssi $\ln(10^{-2})>nln\left(\frac{3}{4}\right)$

Ssi $\frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}<n$ car $\frac{3}{4}<1$ donc $\ln\left(\frac{3}{4}\right)<0$ ainsi $n>\frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\approx 16{,}007$

Donc le plus petit entier naturel est $n=17$.

<u>Exercice 2</u> : 14 pts

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction f par : $f(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}\textit{, on est en présence de la FI "}\infty/\infty\textit{"}$$

Méthode 1	Méthode 2
$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}\times\frac{1+x}{x}$ On pose $X=1+x$ Donc si $x\to+\infty$ alors X$\to+\infty$ Or $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{lnX}{X}=0$ par croissance comparée Et $\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}+1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1=1$ Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$	$f(x)=\frac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)}{x}=\frac{\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x}$ $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x}=\frac{\ln(x)}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\times\frac{1}{x}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ Donc par produit et somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2. Expliquer pourquoi la recherche d'une éventuelle limite de la fonction f quand x tend vers 0 conduit à une forme indéterminée.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)=\ln(1)=0\\ \lim\limits_{x\to0}x=0\end{cases}\textit{, on est en présence de la FI "}0/0\textit{"}$$

3. En remarquant que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=\frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x}$ et en utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite de f quand x tend vers 0.

Comme $\ln(1)=0$ alors $f(x)=\frac{ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x}$

Par définition du nombre dérivée : $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x+1-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=f'(1)$

Ici $f(x)=\ln(x)$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x}=f'(1)=\frac{1}{1}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$

4. Démontrer que $f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$

$f(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$, elle est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=\ln(1+x)\\ v(x)=x\end{cases}$ donc $\begin{cases}u'(x)=1\times\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}\\ v'(x)=1\end{cases}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\times x-\ln(1+x)\times1}{x^2}=\frac{\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{x^2}=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}$$

5. On définit sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction g par $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$
   Calculer $g'(x)$.

$$g'(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1}\right) = 1 - \ln(x+1) - 1 = -\ln(x+1)$$

6. En déduire les variations de la fonction g sur sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et donner $g(0)$.

- Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $1 + x > 1$ donc $\ln(x+1) > 0$, ainsi $g'(x) = -\ln(x+1) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

- $g(0) = 0 - (0+1)\ln(0+1) = 0$

7. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Faire un tableau de variation complet avec les limites.

On sait que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

Comme la fonction g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et que $g(0) = 0$

Alors $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

De plus, $x^2 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

8. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ que l'on notera α.

La fonction f est définie et continue sur $]0\,;\,+\infty[$ car composée de fonctions continues.

Elle est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$, comme $0{,}5 \in [0\,;1]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$.

9. Donner une valeur approchée de α au dixième près.

D'après la calculatrice : $\alpha \approx 2{,}5$

10. Démontrer que si $\frac{\ln(3{,}5)}{2{,}5} = 0{,}5$ alors $16e^5 - 2401 = 0$.

$\frac{\ln(3{,}5)}{2{,}5} = 0{,}5$ *donc* $\ln(3{,}5) = 1{,}25$ *donc* $e^{\ln(3{,}5)} = e^{1{,}25} = e^{\frac{5}{4}}$

donc $3{,}5 = e^{\frac{5}{4}}$ *donc* $3{,}5^4 = e^5$ *donc* $150{,}0625 = e^5$ *donc* $2401 = 16e^5$ *donc* $16e^5 - 2401 = 0$

<u>BONUS</u> : Le mathématicien français Charles Hermite a démontré en 1873 que le nombre e est *transcendant*, ce qui signifie qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

11. En déduire que la valeur approchée de α trouvée dans la question 9 n'est pas une valeur exacte.

Comme e est transcendant, alors e ne peut pas être solution de l'équation $16x^5 - 2401 = 0$.

Ainsi $\frac{\ln(3{,}5)}{2{,}5} \neq 0{,}5$ or si $\alpha = 2{,}5$ alors $f(\alpha) = \frac{\ln(3{,}5)}{2{,}5} = 0{,}5$, ce qui est impossible, donc $\alpha \neq 2{,}5$.