Vendredi 05 avril 2024

Fonction logarithme népérien	**Contrôle de mathématiques n°6 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : 6 pts

a) Préciser l'ensemble de définition puis résoudre l'équation suivante : $\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln(3)$

b) Exprimer en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ *et* $\ln(5)$

$$A=\ln(15)-3\ln(8) \qquad B=ln\left(\frac{50}{3e}\right)+\ln(60)$$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n>0{,}99$$

<u>Exercice 2</u> : 14 pts

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction f par : $f(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
2. Expliquer pourquoi la recherche d'une éventuelle limite de la fonction f quand x tend vers 0 conduit à une forme indéterminée.
3. En remarquant que sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=\frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x}$ et en utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer la limite de f quand x tend vers 0.
4. Démontrer que $f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$
5. On définit sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction g par $g(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$
   Calculer $g'(x)$.
6. En déduire les variations de la fonction g sur sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et donner $g(0)$.
7. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Faire un tableau de variation complet avec les limites.
8. Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une unique solution sur sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ que l'on notera α.
9. Donner une valeur approchée de α au dixième près.
10. Démontrer que si $\frac{\ln(3{,}5)}{2{,}5}=0{,}5$ alors $16e^5-2401=0$.

<u>BONUS</u> : Le mathématicien français Charles Hermite a démontré en 1873 que le nombre e est *transcendant*, ce qui signifie qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

11. En déduire que la valeur approchée de α trouvée dans la question 9 n'est pas une valeur exacte.