Dérivation et convexité

Théorème : dérivée d'une fonction composée (admis)

Si u est une fonction dérivable sur une intervalle I et g une fonction dérivable sur J contenant u(I) alors la fonction f définie par f(x) = g(u(x)) = g ∘ u(x) est dérivable sur I et, pour
tout x ∈ I, $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$

Théorème : dérivée de la racine carrée d'une fonction

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur une intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Théorème : dérivée d'une fonction à la puissance n

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n est un entier relatif

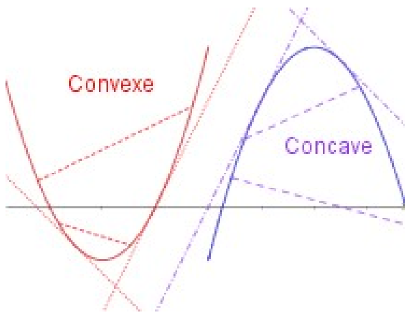
- Si $n \neq 1$, alors la fonction u^n est dérivable sur I alors $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$
- Si n =-1, pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ alors $(\frac{1}{u})' = - \frac{u'}{u{*}{*}2}$

Définition : fonction convexe

- Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- une fonction f est dite concave sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Théorème des fonctions convexes (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I
f est convexe sur I si et seulement f'' est positive sur I



Théorème des fonctions concaves (admis)

soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I
f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I
f et concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I

Définition : point d'inflexion d'une courbe

A est un point d'inflexion de la courbe représentative C_f d'une fonction f si C_f traverse sa tangente en A.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a, si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a.

Propriété : inégalités de convexité (admis)

- si f est convexe sur un intervalle I, alors pour tous nombres *a*, *b* de I, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+(b)}{2}$$

  ce qui se traduit par : l'image du milieu de [a ; b] est inférieur au milieu des images f(a) et f(b), la propriété reste vraie pour tout point du segment [a ; b].
- si f est concave sur un intervalle I, alors pour tous nombres *a*, *b* de I, on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+(b)}{2}$$