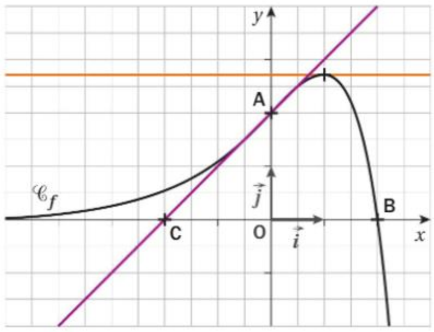
Vendredi 11 octobre 2024

Convexité *Récurrence*	**Corrigé du Contrôle n°2 – 2h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : 10 pts

1. Dans le plan muni d'un repère, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
On a placé les points $A(0\,;2), B(2\,;0)$ et $C(-2\,;0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe C_f
- La droite (AC) est tangente en A à C_f
- La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

1) Indiquer les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$. Justifier.
Comme A(0 ; 2) appartient à la courbe alors $f(0) = 2$
Comme la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est une droite horizontale, son coefficient directeur vaut zéro et donc $f'(1) = 0$

2) Donner une équation de la tangente en A à C_f
Une équation de la tangente en A est : $y = x + 2$

3) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et l'intervalle sur lequel elle semble concave.
La fonction semble convexe sur $]-\infty\,;0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$

2. Dans cette question, on cherche à vérifier, par le calcul, les résultats lus graphiquement dans la question 1.

On admet que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x$$

1) Calculer les valeurs de $f(0)$: $f(0) = (2 - 0)e^0 = 2$
2) Déterminer la dérivée de la fonction f et calculer $f'(1)$
f est de la forme $f = uv$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$

$$f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$$

$f'(1) = (1 - 1)e^1 = 0$
3) Déterminer, par le calcul, une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
Une équation de la tangente en $x = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1$$

Donc $y = 1(x - 0) + 2$ et $y = x + 2$

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (1 - x)e^x$$

Or $1 - x \geq 0$ ssi $x \leq 1$, et l'expression $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f(1) = (2 - 1)e^1 = e$$

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

5) Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout nombre réel x.

$$f'(x) = (1-x)e^x$$

f' est de la forme uv avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = e^x$

$$f''(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

6) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Comme l'expression $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $-x > 0$ sur $\mathbb{R}$- et $-x < 0$ sur $\mathbb{R}$+

Alors

- La dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}$-, la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$-
- La dérivée seconde est négative sur $\mathbb{R}$+, la fonction est concave sur $\mathbb{R}$+

7) Préciser si la courbe C_f admet un point d'inflexion. Justifier.

Au point $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

<u>Exercice 2</u> : 3 pts

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

1. <u>Prédicat</u> $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

2. <u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$

   Membre de gauche : $\frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$

   Membre de droite : $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   Il y a égalité donc $P(1)$ est vraie.

3. <u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie.

   <u>Au rang $k+1$</u> : On veut montrer que $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}$

   On calcule le membre de gauche au rang $k+1$

   $$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

   Par injection de l'hypothèse de récurrence.

   Donc

   $$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)(k+2) - (k+2) + 1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)(k+1-1)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=1-\frac{1}{k+2}$$

Ainsi $P(k+1)$ est vraie

4. Conclusion : la proposition est initialisée pour $n=1$, elle est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3 : 7 pts

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage un protocole de traitement d'une maladie. L'objectif est d'étudier l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Le protocole consiste à injecter au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toute les heure une dose de 1,8 mg.

On suppose que lorsqu'une heure s'est écoulée après injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, le terme u_n désigne la quantité de médicament, exprimé en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure.

On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer la quantité u_1 de médicament présente dans le sang du patient après l'injection de la première heure.

$$u_1 = u_0 - \frac{30}{100}u_0 + 1{,}8 = 0{,}7u_0 + 1{,}8 = 0{,}7\times 2 + 1{,}8 = 3{,}2$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$

A la $n+1$-ème heure, la quantité présente est u_n diminuée de 30% et à laquelle on a ajouté 1,8 mg.
Donc $u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100}u_n + 1{,}8 = 0{,}7u_n + 1{,}8$

3. Montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} < 6$ pour tout entier naturel n.

Prédicat $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 2 \leq u_1 = 3{,}2 < 6$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie

Au rang $k+1$: Par hypothèse de récurrence on a

$$u_k \leq u_{k+1} < 6$$

$$0{,}7u_k \leq 0{,}7u_{k+1} < 0{,}7 \times 6$$

$$0{,}7u_k + 1{,}8 \leq 0{,}7u_{k+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8$$

$$u_{k+1} \leq u_{k+2} < 6$$

Ainsi $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc vraie pour tout entier naturel n.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par $v_n = 6 - u_n$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 dont on précisera le terme initial.

On calcule $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8) = -0{,}7u_n + 7{,}8 = 0{,}7\left(-u_n + \frac{7{,}8}{0{,}7}\right) = 0{,}7(-u_n + 6)$

Donc $v_{n+1} = 0{,}7v_n$

C'est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$ et $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$

5. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

Comme (v_n) est une suite géométrique alors $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$.

6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Comme $v_n = 6 - u_n$ alors $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$

7. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicaments présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, avec la calculatrice, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

On cherche n tel que $u_n \geq 5{,}5$, d'après la calculatrice :

$u_5 = 5{,}32$ et $u_6 = 5{,}52$, ainsi pour $n = 6$.

Il y a en tout 7 injections, de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6.