Vendredi 15 novembre 2024

Fonction exponentielle de base e	**Corrigé du Contrôle n°3 – 1h avec calculatrice** Tronc commun : 0 pts - Spécialité : 20 pt	Nom : Classe : TSTI2

Cours : 1 pt

a) Compléter : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) Citer les formes indéterminées de limites : "$\infty - \infty$" ; "$0 \times \infty$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{\infty}{\infty}$"

Exercice 1 : 3 pts

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^{2x}-1)(2e^{-2x}+3) = 2e^{2x}\times e^{-2x} + 3e^{2x} - 2e^{-2x} - 3 = 2 + 3e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$
$= 3e^{2x} - 2e^{-2x} - 1$

b) $\frac{e^{2x}\times(-4)-(-2x+3)e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x}+2xe^{2x}-3e^{2x}}{e^{2x}\times e^{2x}} = \frac{e^{2x}(-7+2x)}{e^{2x}\times e^{2x}} = \frac{2x-7}{e^{2x}}$

Exercice 2 : 3 pts

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} -4(e^{7x}-10)$

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{7x} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -10 = -10 \end{cases}$ donc par somme $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} e^{7x} - 10 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} -4 = -4 \end{cases}$ donc par produit et règle des signes :

$$\lim_{x\to+\infty} -4(e^{7x}-10) = -\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} - 7x + 2$

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \textit{ par croissance comparée} \\ \lim_{x\to+\infty} -7x = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \end{cases}$ donc par somme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} - 7x + 2 = -\infty$

Exercice 3 : 6 pts

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x-1)e^{2x+1}$$

1. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ecrire les calculs.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = -3e^0 = -3$$

2. Montrer que $f'(x) = (8x+2)e^{2x+1}$

$$f(x) = (4x-1)e^{2x+1} = uv$$

Avec $\begin{cases} u(x) = 4x-1 \\ v(x) = e^{2x+1} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 4 \\ v'(x) = 2e^{2x+1} \end{cases}$

On utilise la formule : $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 4e^{2x+1} + (4x-1)\times 2e^{2x+1} = 4e^{2x+1} + 8xe^{2x+1} - 2e^{2x+1} = e^{2x+1}(2+8x)$$

3. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau des variations de f.

La dérivée est : $f'(x) = e^{2x+1}(8x+2)$

- Pour tout réel x ; $e^{2x+1} > 0$

- On résout : $8x + 2 > 0$ soit $8x > -2$ et $x > -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

Tableau de signes de f' et de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$e^{(2x+1)}$	$+$		$+$
$8x+2$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-2e^{(0,5)}$	↗

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) - 1\right) e^{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+1} = -2e^{\frac{1}{2}}$$

4. Déterminer la limite de la fonction en $+\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 4x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1} = +\infty \end{cases}$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = -\frac{1}{2}$

L'équation de la tangente est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right) e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = -2e^0 = -2$

Donc l'équation est : $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 3$ soit $y = -2x - 4$

<u>Exercice 4</u> : 7 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{-0,4x} + b$

1. Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, déterminer la valeur de b.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} ae^{-0,4x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} b = b \end{cases}$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} ae^{-0,4x} + b = b$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ donc $b = 5$

2. On donne $f(0) = 2$. Déterminer la valeur de a.

On calcule : $f(0) = ae^{-0,4\times 0} + 5 = a + 5 = 2$ ainsi $a = 2 - 5 = -3$

Dans la suite $f(x) = -3e^{-0,4x} + 5$

3. Déterminer $f'(x)$.

$$f'(x) = -3 \times (-0,4)e^{-0,4x} = 1,2e^{-0,4x}$$

4. A la calculatrice, déterminer la valeur de x afin que $f(x)$ soit égale à 80% de sa valeur limite. Donner une valeur approchée au millième.

On cherche x tel que $f(x) = \frac{80}{100} \times 5 = 4$ soit $-3e^{-0,4x} + 5 = 4$

Donc $e^{-0,4x} = \frac{1}{3}$

D'après la calculatrice : $e^{-0,4\times 2,746} \approx 0,3334$ et $e^{-0,4\times 2,747} \approx 0,3332$

Donc une valeur approchée au millième est : $x \approx 2,746$