Vendredi 10 janvier 2025

Nombres complexes	**Corrigé du Contrôle n°5 – 1h avec calculatrice** Tronc commun : 20 pts - Spécialité : 0 pt	Nom : Classe : TSTI2

Cours : 1 pt

- $cos(a-b) = cosa\ cosb + sina\ sinb$
- $sina\ cosb + cosa \sin b = \sin(a+b).$

Exercice 1 : On considère les nombres complexes suivants $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_2 = 1+i$ et $z_3 = 4+3i$

a) Montrer que $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

$$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2isin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2i \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

b) Calculer la forme exponentielle de z_2

- Module de z_2 : $|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument de z_2 : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$
- Une forme exponentielle est : $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) Déterminer la forme algébrique de $z_2 \times z_3$

$$z_2 \times z_3 = (1+i)(4+3i) = 4+3i+4i-3 = 1+7i$$

d) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

e) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_2}{z_3}$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{1+i}{4+3i} = \frac{(1+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4-3i+4i+3}{16-12i+12i+9} = \frac{7+i}{25} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$$

Exercice 2 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x + \sin x$

1. Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
   - $f(0) = cos0 + sin0 = 1 + 0 = 1$
   - $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
   - $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

2. Trouver les valeurs de a et ϑ tels que $f(x) = a\cos(x+\vartheta)$

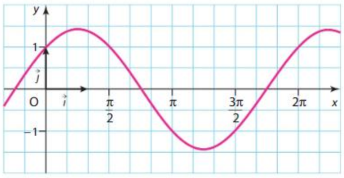
$$f(x) = \cos x + \sin x = acosx = bsinx$$

On pose : $z = a - ib = 1 - i$

- Module : $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Argument : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi $f(x) = |z|\cos(x+\vartheta) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

3. Une représentation de cette fonction est :



Par lecture graphique,

a) Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 2$

Par lecture graphique, l'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution.

b) Quelles sont les solutions de $f(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$

Par lecture graphique, les solutions de $f(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$ sont $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\right\}$

4. Par le calcul, résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $[0\,;2\pi[$

On résout : $cosx + sinx = 1$

Comme $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ alors on résout : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\frac{\pi}{4}$$

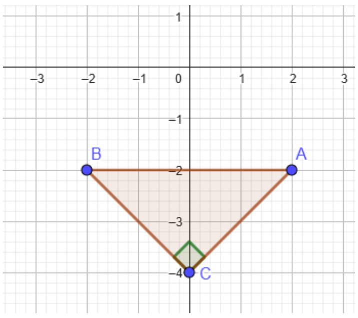
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Il y a deux solutions à cette équation $S = \left\{0\,;\,\frac{\pi}{2}\right\}$

<u>Exercice 3 :</u>

On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i\,;\, z_B = -2 - 2i\,;\, z_C = -4i$$



a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe ci-contre

b) Calculer $|z_B - z_A|$

$$|z_B - z_A| = |-2 - 2i - (2 - 2i)| = |-4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$$

c) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

On calcule :

$$|z_B - z_C| = |-2 - 2i + 4i| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|z_A - z_C| = |2 - 2i + 4i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Comme $BC = |z_B - z_C| = \sqrt{8}$ et que $AC = |z_A - z_C| = \sqrt{8}$ et $AB = |z_B - z_A| = 4$

On en déduit que le triangle ABC est isocèle en C.

On calcule : $AB^2 = 4^2 = 16$ et $AC^2 + BC^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 + 8 = 16$

Ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en C.

Finalement le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

Exercice 4 : A faire en dernier

On considère le nombre complexe $z = \frac{2-i}{1-3i}$

Le nombre complexe z^4 est-il un nombre réel négatif ?

- Forme algébrique : $z = \frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i-i+3}{1+9} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+i)$
- Forme exponentielle :
    - Module : $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
    - Argument : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4}$
    - Ainsi $z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
- On calcule $z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 e^{i\frac{\pi}{4}\times 4} = \frac{4}{16} e^{i\pi} = -\frac{1}{4}$

Ainsi z^4 est bien un nombre réel négatif.