Mardi 14 janvier 2025

Nombres complexes	**Corrigé du Contrôle n°5 Rattrapage – 1h** Tronc commun : 0 pts - Spécialité : 20 pt	Nom : Classe : TSTI2

<u>Cours</u> : 1 pt

- $sin(a-b) = \sin a cos b - \cos a \sin b$
- $cos\, cos b + sin a \sin b = \cos\,(a-b)$

<u>Exercice 1</u> : On considère les nombres complexes suivants ; $z_1 = -1+i$ et $z_2 = 7-4i$; $z_3 = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$

a) Montrer que la forme exponentielle de z_1 est $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

- Module : $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$
- Argument : $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $donc\ \theta = \frac{3\pi}{4}$

Ainsi $z_1 = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) Calculer la forme algébrique de z_3

$$z_3 = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 6(0+i\times 1) = 6i$$

c) Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = (-1+i)(7-4i) = -7+4i+7i+4 = -3+11i$$

d) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_3}$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{6e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

e) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{7-4i} = \frac{(-1+i)(7+4i)}{(7-4i)(7+4i)} = \frac{-7-4i+7i-4}{49-28i-28i+16} = \frac{-11+3i}{65} = -\frac{11}{65}+\frac{3}{65}i$$

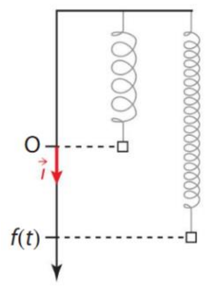
<u>Exercice 2</u> :

Un mobile de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9\ N/m$.

Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

A chaque instant t, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$.

Les lois de la Physique montrent que : $f(t) = \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t)$



1. Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- $f(0) = \frac{1}{2}\cos(3\times 0) + \frac{1}{2}\sin(3\times 0) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}cos\pi + \frac{1}{2}sin\pi = \frac{1}{2}\times(-1) + \frac{1}{2}\times 0 = -\frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(3\times\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(3\times\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times(-1) = -\frac{1}{2}$

2. Trouver les valeurs de A et θ telles que : $f(t) = \text{A}\cos(3t + \theta)$

   On pose : $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

   - Module : $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   - Argument : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1/2}{\sqrt{2}/2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $donc\ \theta = -\frac{\pi}{4}$

Ainsi $f(t) = \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

3. Résoudre : $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ dans $[0\,;2\pi[$

   $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ alors $\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

   Ainsi : $\begin{cases} 3t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ 3t - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3t = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{3\pi}{4} \\ 3t = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

   Les solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ sont $S = \left\{\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{12}\right\}$

4. A partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? Arrondir au dixième.

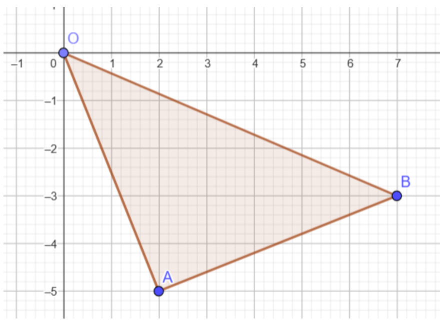
   Le mobile revient à sa position d' »équilibre lorsque $f(t) = 0$ à savoir lorsque $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

   D'après la question précédente, cela se produit pour $t = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}8$.

<u>**Exercice 3**</u> **:**

On considère O, A et B les points du plan d'affixes respectives :

$$z_O = 0\,;\,z_A = 2 - 5i\,;\,z_B = 7 - 3i$$



a) Placer les points O, A et B dans le plan complexe ci-contre

b) Calculer $|z_B - z_A|$

$$|z_B - z_A| = |7 - 3i - (2 - 5i)| = |7 - 3i - 2 + 5i| = |5 + 2i|$$

$$|z_B - z_A| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

c) Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle.

On calcule :

- $OB = |z_B - z_O| = |7 - 3i| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$
- $OA = |z_A - z_O| = |2 - 5i| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$
- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{29}$

Ainsi $AB = AO = \sqrt{29} \neq OB = \sqrt{58}$ donc le triangle OAB est isocèle en A.

On calcule :

- $AB^2 = \left(\sqrt{58}\right)^2 = 58$
- $OA^2 + OB^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29 + 29 = 58$

Comme $AB^2 = OA^2 + OB^2$ alors le triangle OAB est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.