Vendredi 31 janvier 2025

Fonction logarithme népérien	**Corrigé du Contrôle n°6 – 1h avec calculatrice** Tronc commun : 0 pts - Spécialité : 20 pt	Nom : Classe : TSTI2

Cours : 2 pt , Soient a, b deux réels strictement positifs et n un entier naturel

- $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- $n \times \ln(a) = \ln(a^n)$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Exercice 1 : Résoudre

a. $5\ln(4x+6) - 3 = 0$ sur $I =]-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$

On isole le LN, $\ln(4x+6) = \frac{3}{5}$ puis on prend l'image par la fonction exp : $e^{\ln(4x+6)} = e^{3/5}$

Ainsi $4x + 6 = e^{3/5}$ et $x = \frac{e^{3/5}-6}{4} \approx -1{,}04 \in I$

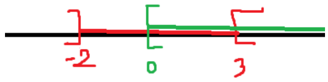
Donc $S = \left\{\frac{e^{\frac{3}{5}}-6}{4}\right\}$

b. $e^{x^2-2} < e^{x+4}$ sur $I = [0\ ;\ +\infty[$

On prend l'image par la fonction LN : $\ln\left(e^{x^2-2}\right) < \ln\left(e^{x+4}\right)$ soit $x^2 - 2 < x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0$

D'après la calculatrice : $x \in]-2\ ;3[$

Or $I = [0\ ;\ +\infty[$ donc $S = [0\ ;3[$



Exercice 2 :

a) Effectuer le calcul : $A = \ln\left(e^{-2} \times \sqrt{e}\right) + \ln(e^5) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$$A = \ln(e^{-2}) + \ln(\sqrt{e}) + 5\ln(e) + \ln(e) = -2\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) + 5\ln(e) + \ln(e) = \frac{9}{2}\ln(e) = \frac{9}{2}$$

b) Simplifier : $B = \ln(4) - 3\ln(8) + 2\ln(\sqrt{2})$

$$B = \ln(2^2) - 3\ln(2^3) + 2 \times \frac{1}{2}\ln(2) = 2\ln(2) - 9\ln(2) + \ln(2) = -6\ln(2)$$

Exercice 3 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10 - 2\ln(x)$ $\qquad f'(x) = 6x^2 - 12x - \frac{2}{x}$

b) $g(x) = \frac{\ln(x)+2}{x-3} = \frac{u}{v}$

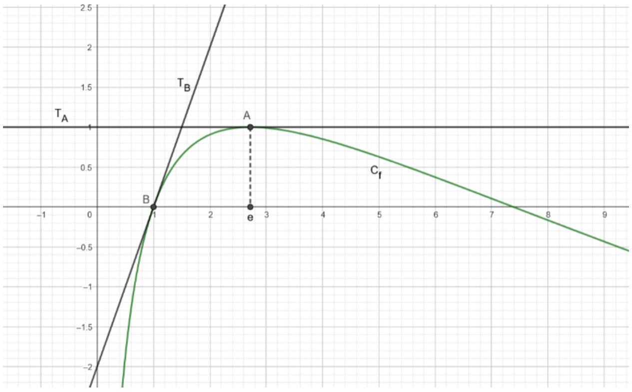
Avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) + 2 \\ v'x) = x - 3 \end{cases}$ $donc$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-3) - (lnx + 2) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{1 - \frac{3}{x} - lnx - 2}{(x-3)^2}$$

Vendredi 31 janvier 2025

Exercice 4 :



Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
C_f est la courbe représentative de la fonction f.
T_A est la tangente horizontale à la courbe C_f au point A.
T_B est la tangente à la courbe C_f passe par le point B.
La courbe passe par le point de coordonnées $(-2\,;0)$.

Partie A : Lecture graphique

1. Par lecture graphique, déterminer $f(e)$.
   $f(e) = 1$
2. Par lecture graphique, déterminer $f'(e)$.
   $f'(e) = 0$ c'est le coefficient directeur de la tangente horizontale en $x = e$
3. Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$.
   $f'(1) = 2$ c'est le coefficient directeur de la tangente en $x = 1$
4. Par lecture graphique, résoudre $f(x) = 0$: $S = \{1\,;7{,}5\}$
5. Donner une équation de la droite T_B : $y = 2x - 2$

Partie B : Par le calcul – avec justifications

On donne $f(x) = (2 - \ln(x))\ln(x)$

1. Montrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln(x))}{x}$

$$f(x) = (2 - \ln(x))\ln(x) = uv$$

Avec $\begin{cases} u(x) = 2 - \ln(x) \\ v'x) = \ln(x) \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

On utilise la formule : $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln(x) + (2 - \ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2 - 2lnx}{x} = \frac{2(1 - lnx)}{x}$$

2. Etudier le signe de f' et donner le tableau de variations de la fonction f

Tableau de variation de f

x	0	e	$+\infty$
2	$+$		$+$
$1-lnx$	$+$	0	$-$
x	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

on résout : $1 - lnx \geq 0 \iff lnx \leq 1 \iff x \leq e$

On calcule : $f(e) = (2 - \ln(e))\ln(e) = 1$

3. Par le calcul, retrouver l'équation de la tangente T_B.
   On calcule : $f'(1) = \frac{2(1-ln1)}{1} = 2$ et $f(1) = (2 - ln1)(ln1) = 0$
   Ainsi : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$

4. Résoudre $f(x) = 0$ par le calcul.
   On résout : $(2 - lnx)lnx = 0$, un produit est nul ssi l'un des facteurs est nul :
   $\begin{cases} 2 - lnx = 0 \\ lnx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} lnx = 2 \\ x = e^0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e^2 \approx 7{,}4 \\ x = 1 \end{cases}$, les solutions sont : $S = \{1\,;e^2\}$