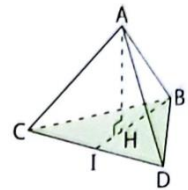




Orthogonalité dans l'espace	Corrigé Contrôle de mathématiques n°6 – 1h Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé
-----------------------------	--	------------------------

Exercice 1 :

La Maladrerie Saint-Lazare, à Beauvais, accueille une sculpture formée de 693 pièces de zinc. On modélise cette œuvre par un tétraèdre régulier ABCD d'arête 1.



1. a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Comme ABCD est un tétraèdre régulier, tous les triangles sont équilatéraux.

Ainsi tous les angles font 60° .

ABD est un triangle équilatéral : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times 1 \times \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

ABC est un triangle équilatéral : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 1 \times \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

c) Que peut-on en déduire pour les droites (BA) et (CD) ?

Comme $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux et les droites (BA) et (CD) sont orthogonales.

2. H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). I est le point d'intersection des droites (BH) et (CD).

a) En écrivant $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$, calculer $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

Comme (AH) est orthogonale au plan (BCD) alors (AH) est orthogonale à toutes les droites du plan, en particulier à (CD).

Ainsi $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 0 = 0$

On en déduit que (BH) est orthogonale à (CD) donc (BH) est la hauteur du triangle BCD issue de B.

b) Calculer les longueurs BI et AI.

Le triangle BCD est équilatéral, la hauteur (BH) est aussi la médiane, ainsi I est le milieu de [CD].

Le triangle BID est rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore : $BI^2 = BD^2 - ID^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Donc $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle ACD a les mêmes dimensions que le triangle BCD, donc $AI = BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.





c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$.

Dans le triangle AIB, isocèle en I, on note K le milieu de [AB], la médiane (IK) est aussi hauteur.
Ainsi le triangle IBK est rectangle en K.

D'après les formules de trigonométrie dans le triangle rectangle : $\cos(\widehat{IBA}) = \frac{BK}{BI} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = BA \times BI \times \cos(\widehat{IBA}) = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

d) Ecrire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$ d'une autre façon pour en déduire la longueur BH.

En utilisant le projeté orthogonal : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = BH \times BI$ donc $BH = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}}{BI} = \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. En déduire la distance du point A au plan (BCD).

La distance du point A au plan (BCD) correspond à la longueur AH.

Dans le triangle AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{Donc } AH = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Figure Geogebra : [lien](#)

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un cube de côté 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le point I de coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

- Donner, sans calcul, les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

$$A(0; 0; 0) \quad B(1; 0; 0) \quad C(1; 1; 0) \quad D(0; 1; 0)$$

$$E(0; 0; 1) \quad F(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1) \quad H(0; 1; 1)$$

- Montrer que $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.

On calcule les composantes des vecteurs :

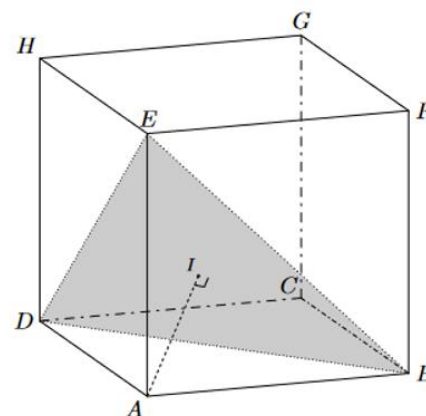
$$\overrightarrow{DI} \left(\frac{1}{3} - 0 ; \frac{1}{3} - 1 ; \frac{1}{3} - 0 \right) = \left(\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} \right) \quad \overrightarrow{DB} (1 - 0 ; 0 - 1 ; 0 - 0) = (1 ; -1 ; 0)$$

$$\overrightarrow{DE} (0 - 0 ; 0 - 1 ; 1 - 0) = (0 ; -1 ; 1)$$

On calcule :

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}(1 ; -1 ; 0) + \frac{1}{3}(0 ; -1 ; 1) = \left(\frac{1}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} \right)$$

Ce sont les composantes de $\overrightarrow{DI}$ donc $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$.





3. Montrer que I est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDE).

- On montre que I appartient au plan (BDE).

Comme $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$, les vecteurs sont coplanaires et donc les points D, I, B et E sont coplanaires. Ainsi Le point I appartient au plan (BDE).

- On montre que la droite (AI) est orthogonale au plan (BDE).

$$\overrightarrow{AI} \left(\frac{1}{3} - 0 ; \frac{1}{3} - 0 ; \frac{1}{3} - 0 \right) = \left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \right)$$

On calcule les produits scalaires :

$$- \quad \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times 0 = 0 \qquad \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times 1 = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux et les droites (AI) et (DB) sont orthogonales.

Ainsi $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux et les droites (AI) et (DE) sont orthogonales.

La droite (AI) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDE) donc (AI) est orthogonale au plan (BDE).

Conclusion : Le point I est sur le plan (BDE) et la droite (AI) est orthogonale au plan (BDE) alors I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

4. Montrer que le triangle BDE est équilatéral.

Les segments [BD], [DE] et [BE] sont les diagonales de trois carrés de mêmes dimensions donc ces longueurs sont égales et le triangle BDE est équilatéral.

5. Montrer que l'aire du triangle BDE vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de BD : Le triangle ABD est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \qquad \text{Donc } BD = \sqrt{2}.$$

Soit J le milieu de [BD], alors (EJ) est la médiane issue de E mais aussi la hauteur car le triangle est équilatéral.

Calcul de EJ : le triangle EJB est rectangle en J, d'après la trigonométrie

$$EJ = EB \times \sin(\widehat{DBE}) = \sqrt{2} \times \sin(60^\circ) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Aire du triangle BDE} : A_{BDE} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. Calculer le volume du tétraèdre ABDE.

Le segment [AI] est la hauteur du tétraèdre.

$$\text{Calcul de AI} : AI = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{ABDE} = \frac{1}{3} \times A_{BDE} \times AI = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{6}$$