Vendredi 16 mai 2025

Equation différentielle Variable aléatoire	**Corrigé Contrôle n°7 – 50min avec calculatrice** Tronc commun : 0 pts - Spécialité : 20 pt	Nom : Classe : TSTI2

Exercice 1 :

François possède une piscine naturelle de 80 000 L d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, François décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par de l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, François ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.
Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f.
Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, $f(t)$ représente la quantité en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.
On admet que la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -0{,}00625y + 30$$

1. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle.
   Les solutions sont : $y(x) = Ce^{-0{,}00625t} - \frac{30}{-0{,}00625} = Ce^{-0{,}00625t} + 4800$

2. Quelle est la condition initiale pour la fonction f d'après l'énoncé ?
   La condition initiale est : $f(0) = 0$ car avant la mise en route l'eau de la piscine n'est pas contaminée.

3. Déterminer la solution qui vérifie cette condition initiale.
   $$y(0) = Ce^{-0{,}00625\times 0} + 4800 = 0$$
   $C + 4800 = 0$ donc $C = -4800$
   La solution est : $y(x) = -4800e^{-0{,}00625t} + 4800$

4. On admet que la fonction est : $f(t) = 4800 - 4800e^{-0{,}00625t}$
   a. Calculer la quantité d'eau contaminée au bout de 72h. Arrondir à l'unité.
   $$f(72) = 4800 - 4800e^{-0{,}00625\times 72} \approx 1739\ L$$
   b. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   $$f(t) = 4800 - 4800e^{-0{,}00625t}$$
   On calcule $f'(t) = -4800 \times (-0{,}00625)e^{-0{,}00625t} = 30e^{-0{,}00625t}$
   Comme une exponentielle est strictement positive sur $[0\,;\,+\infty[$ alors $f'(t) \geq 0$ et la fonction est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3% du volume d'eau de la piscine. Déterminer au bout de combien de temps (en heures) l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.
   On calcule 3% du volume d'eau de la piscine : $80\,000 \times \frac{3}{100} = 2400$L
   On cherche t tel que $4800 - 4800e^{-0{,}00625t} \geq 2400$
   $$-4800e^{-0{,}00625t} \geq 2400 - 4800 = -2400$$
   $$e^{-0{,}00625t} \leq -\frac{2400}{-4800} = 0{,}5$$
   On prend l'image par la fonction ln : $\ln\left(e^{-0{,}00625t}\right) \leq \ln(0{,}5)$
   $$-0{,}00625t \leq \ln(0{,}5)$$
   $$t \geq \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}00625} 110{,}9$$
   Au bout de 110,9h, l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

Exercice 2 :
Une entreprise souhaite recruter de nouveaux commerciaux, avec ou sans expérience.
Suite à une petite annonce, elle reçoit un très grand nombre de CV.
Pour cette entreprise, on estime que les CV correspondant à des personnes avec expérience représentent 20% de l'ensemble des CV reçus.
Le directeur des ressources humaines choisit au hasard 10 CV et les examine.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de CV correspondant à des personnes avec expérience parmi les 10 CV choisis.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   a) L'expérience consiste à tirer au hasard un CV
   b) Elle admet deux issues « CV de personne avec expérience » et « CV de personne sans expérience ».
   c) Cette expérience est répétée 10 fois de manière identique et indépendante.
   d) On pose X la variable aléatoire qui compte le nombre de CV de personnes avec expérience, elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 CV parmi les 10 CV choisis correspondent à des personnes avec expérience.

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} 0{,}2^6 \times (1 - 0{,}2)^4 = 0{,}0055$$

3. Déterminer la probabilité qu'au moins un CV parmi les 10 CV choisis corresponde à des personnes avec expérience.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}2^0 \times (1 - 0{,}2)^{10} = 0{,}89$$

4. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

$$E(X) = np = 10 \times 0{,}2 = 2$$

En moyenne, en tirant un grand nombre de paquets de 10 CV, le directeur des ressources humaines aura 2 CV de personnes avec expérience.

Exercice 3 :
Une urne contient 3 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.
Un jeu consiste à tirer deux boules de l'urne, la première étant remise avant d'extraire la seconde.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le produit des numéros sur les boules.

1. Faire un tableau qui donnent l'ensemble des tirages (les issues) ET les différentes valeurs de X.

	1	2	3
1	(1 ; 1) X=1	(1 ; 2) X=2	(1 ;3) X=3
2	(2 ;1) X=2	(2 ;2) X=4	(2 ;3) X=6
3	(3 ;1) X=3	(3 ;2) X=6	(3 ;3) X=9

2. Donner la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau

La loi de probabilité de X :

$X = x_i$	1	2	3	4	6	9
$P(X = x_i)$	1/9	2/9	2/9	1/9	2/9	1/9

3. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{1}{9} = 4$$

En répétant un grand nombre de fois ce jeu, le produit des numéros est en moyenne de 4.