Dérivation Convexité	**Corrigé du Contrôle n°1 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : On donne le tableau de variation de la dérivée d'une fonction f définie sur [-1 ; 3] telle que $f(-1) = 0$; $f(1{,}5) = -4$ et $f(3) = 10$

x	-1		0		1		$1{,}5$		3
$f'(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5

1. Tracer le tableau de signes de f'

x	-1		0		$1{,}5$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$

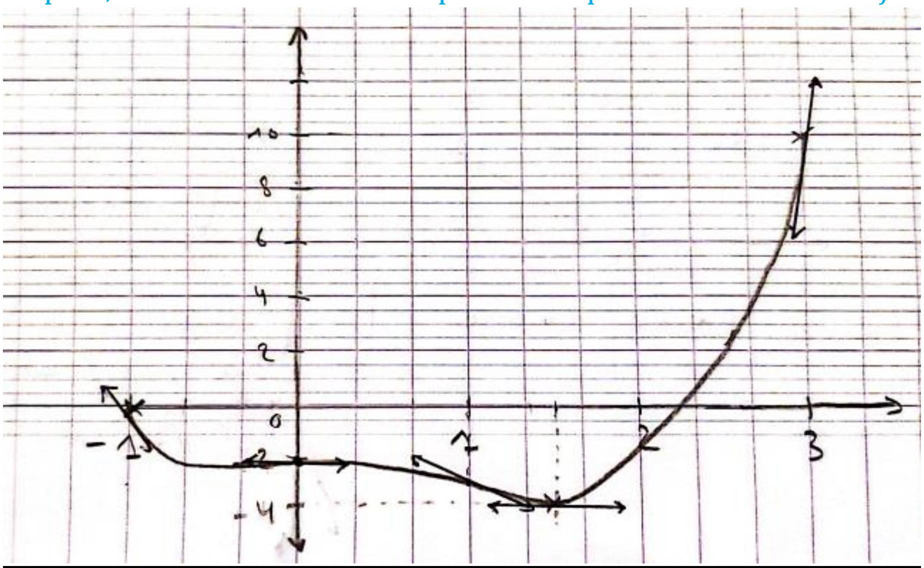
2. Tracer le tableau de variation de la fonction f

x	-1		0		1		$1{,}5$		3
$f'(x)$	-1	$-$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	5
$f(x)$	0	$\searrow$					-4	$\nearrow$	10
convexité		convexe		concave		convexe		convexe	

3. Etudier sa convexité

Comme la fonction f' est croissante sur [-1 ; 0], la fonction f est convexe sur [-1 ; 0].
Comme la fonction f' est décroissante sur [0 ; 1], la fonction f est concave sur [0 ; 1].
Comme la fonction f' est croissante sur [1 ; 3], la fonction f est convexe sur [1 ; 3].

3. Tracer, dans un repère, une allure de la courbe pouvant représenter la fonction f.



Jeudi 18 septembre 2025

Exercice 2 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes

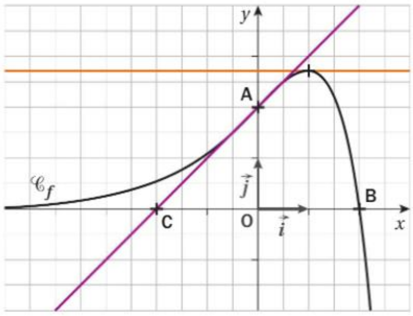
a) $f(x) = (4x^2 + 9)^3$ $\quad$ $f = u^3$ avec $u(x) = 4x^2 + 9$ $\quad$ donc $f' = 3u' \times u^2$ avec $u'(x) = 8x$

donc $f'(x) = 3 \times 8x \times (4x^2 + 9)^2 = 24x(4x^2 + 9)^2$

b) $g(x) = e^{-\frac{1}{x}+9}$ $\quad$ $g = e^u$ avec $u(x) = -\frac{1}{x} + 9$ $\quad$ donc $g' = u'e^u$ avec $u'(x) = \frac{1}{x^2}$

donc $g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{-\frac{1}{x}+9}$

Exercice 3 :



1. Dans le plan muni d'un repère, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On a placé les points $A(0\,;2)$, $B(2\,;0)$ et $C(-2\,;0)$.
On dispose des renseignements suivants :
- Le point B appartient à la courbe C_f
- La droite (AC) est tangente en A à C_f
- La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale

1. Donner une équation de la tangente en A à C_f. Expliquer

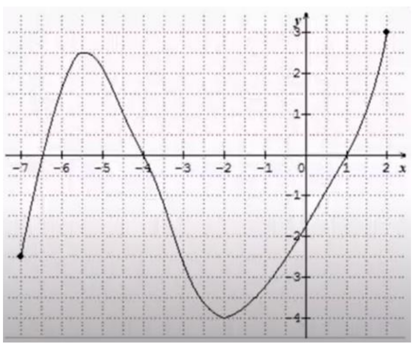
Une équation de la tangente en A est : $y = x + 2$
Comme la droite passe par $A(0\,;2)$ alors 2 est l'ordonnée à l'origine.
Lorsqu'on se déplace d'une unité à droite à partir du point A, on « monte » d'une unité pour rejoindre la droite donc le coefficient directeur est 1.

2. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et l'intervalle sur lequel elle semble concave. Expliquer.

La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;0]$ car les tangentes sont sous la courbe, en A la tangente traverse la courbe donc A est un point d'inflexion et elle semble être concave sur $[0\,;\,+\infty[$ car les tangentes sont au-dessus de la courbe.

Exercice 4 : Voici la représentation graphique de la **fonction dérivée f'** d'une fonction f.

Par lecture graphique, sur quels intervalles la fonction semble être convexe ? concave ? Justifier.



Comme la fonction dérivée f' est croissante sur [-7 ; -5,5] alors la fonction est convexe sur [-7 ; -5,5].

Comme la fonction dérivée f' est décroissante sur [-7 ; -2] alors la fonction est concave sur [-5,5 ; -2].

Comme la fonction dérivée f' est croissante sur [-2 ; 2] alors la fonction est convexe sur [-2 ; 2].

Exercice 5 :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{3x^2 - x - 4}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

   La fonction g est de la forme $g = \sqrt{u}$
   Elle est définie lorsque $u(x) \geq 0$

   On doit résoudre : $3x^2 - x - 4$

   $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 > 0$$

   Le polynôme admet deux racines : $x_1 = \frac{1-\sqrt{49}}{2\times3} = -1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{49}}{2\times3} = \frac{4}{3}$
   Comme le coefficient dominant est $a = 3 > 0$ alors le polynôme est positif en dehors des racines.
   La fonction g est définie sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [\frac{4}{3}\,;\,+\infty[$

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction g

   La fonction $g = \sqrt{u}$ est dérivable lorsque $u(x) > 0$
   D'après l'étude de la question précédente, g est dérivable sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]\,\frac{4}{3}\,;\,+\infty\,[$

3. Montrer que $g'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-4}}$

La fonction $g = \sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x^2 - x - 4$

Comme $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u'(x) = 6x - 1$

Alors $g'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-4}}$

4. Etudier les variations de la fonction g. Justifier. Faire le tableau de variation.

Pour étudier les variations de g, on étudie le signe de sa dérivée g' avec $g'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-4}}$

Comme $2\sqrt{3x^2 - x - 4} > 0$ sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]\,\frac{4}{3}\,;\,+\infty\,[$ alors le signe de g' est celui de $6x - 1$.

On résout : $6x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$

Donc $g'(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;\,-1]$ et $g'(x) \geq 0$ sur $[\frac{4}{3}\,;\,+\infty[$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$		↘	0		0	↗	

5. Etudier la convexité de la fonction g (sur quels intervalles est-elle convexe ? concave ?). Justifier.

On calcule la dérivée seconde g'' de g et on étudie son signe.

$g'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-4}} = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 6x - 1 \\ v(x) = 2\sqrt{3x^2 - x - 4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 6 \\ v'(x) = 2 \times \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-4}} = \frac{6x-1}{\sqrt{3x^2-x-4}} \end{cases}$

On sait que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Donc $g''(x) = \dfrac{6\times2\sqrt{3x^2-x-4}-(6x-1)\times\frac{6x-1}{\sqrt{3x^2-x-4}}}{(2\sqrt{3x^2-x-4})^2} = \dfrac{\frac{12\left(\sqrt{3x^2-x-4}\right)^2-(6x-1)^2}{\sqrt{3x^2-x-4}}}{(2\sqrt{3x^2-x-4})^2} = \dfrac{12(3x^2-x-4)-(6x-1)^2}{(2\sqrt{3x^2-x-4})^2\sqrt{3x^2-x-4}}$

$$g''(x) = \frac{36x^2 - 12x - 48 - 36x^2 + 12x - 1}{(2\sqrt{3x^2 - x - 4})^2\sqrt{3x^2 - x - 4}} = \frac{-49}{(2\sqrt{3x^2 - x - 4})^2\sqrt{3x^2 - x - 4}}$$

Comme le numérateur est négatif et le dénominateur est positif, alors la dérivée seconde est négative et la fonction est concave sur $]-\infty\,;\,-1] \cup [\frac{4}{3}\,;\,+\infty[$

BONUS : Soient a, b, c, d quatre réels avec $a \neq 0$, Montrer que la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet un point d'inflexion.

On calcule $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$

La courbe admet un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule et change de signe.

$6ax + 2b \geq 0$ ssi $6ax \geq -2b$ et $x \geq -\frac{2b}{6a}$ si $a > 0$ ou $x \leq -\frac{2b}{6a}$ si $a < 0$

Donc dans tous les cas, la dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = -\frac{b}{3a}$, ce qui prouve que la courbe admet un point d'inflexion en $x = -\frac{b}{3a}$