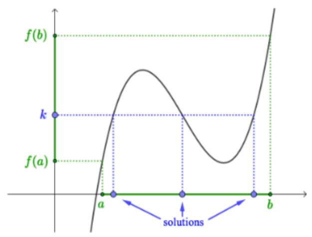
CHAPITRE XI : Les fonctions continues

f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un nombre appartenant à I.
Dire que f est continue en a signifie que f a une limite finie en a et que $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

Propriétés : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.
- Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle. (⚠ ~~Réciproque~~)

Théorème des valeurs intermédiaires :
-On considère la fonction f continue sur l'intervalle [a ;b].
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet au moins une solution comprise entre a et b.



Méthode d'utilisation :
1. Vérifier les conditions

- La fonction f est **continue** sur un intervalle [a;b]

2. Calculer les valeurs aux bornes

$f(a)$ et $f(b)$

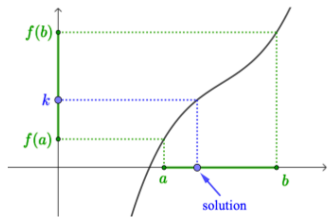
3. Comparer avec la valeur cherchée

$f(x) = k$

Vérifier que :

$f(a) \leq k \leq f(b)$ ou $f(b) \leq k \leq f(a)$

4. Conclure avec le TVI
Comme f est continue sur $[a, b]$ et que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe **au moins un réel** $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :
-On considère la fonction f continue et **strictement monotone** sur l'intervalle [a ;b].
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet **une unique solution** comprise entre a et b.

*La méthode d'utilisation est la même sauf pour la conclusion car elle admet une unique solution

Limite de la suite $u_{n+1}=f(u_n)$. "Petit théorème du point fixe"

f est une fonction définie et continue sur un intervalle fermé avec f(I)⊂I
et $(u_n)_n$ une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ avec son premier terme dans I

- La suite (u_n) est bien définie et $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$
- Si la suite converge vers une limite L alors L est solution de l'équation f(x)=x

On dit que c'est un point fixe de la fonction f

Méthode d'utilisation :

- Exprimer u_{n+1} sous la forme $f(u_n)$
- Vérifier que f est continue sur I
- Vérifier que les images par f appartiennent à I
- Résoudre, sur I, l'équation f(x) = x
- Appliquer le théorème du point fixe