CHAPITRE XIII : Calcul intégral

Définition d'une unité de surface

Dans un repère orthogonal (O, I, J), l'unité d'air est l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ] cette aire est notée u.a.

Définition et calcul de l'intégrale d'une fonction positive et continue

Si on considère une fonction f continue et positive sur [a ; b], l'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire sous la courbe délimitée par l'axe des abscisses, la droite x = a et x = b. Elle se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Avec a et b qui sont les bornes de l'intégrale.

(Si f est négative on notera l'intégrale avec un signe négatif devant)

Calcul de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Avec F = f'

Pour calculer une intégrale on cherche donc une primitive de la fonction puis on soustrait la primitive en b par celle en a.

Calcul d'aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur [a ; b] telles que f(x)>g(x) alors l'aire entre ces courbes vaut l'intégrale de : f(x)-g(x)

Une fois la soustraction fait on cherche la primitive du résultat et on applique la formule de l'intégrale.

Différentes propriétés de l'intégrale

Linéarité :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Pour le calcul de l'aire d'une fonction de signe non constant on découpe l'intervalle en plusieurs intervalles de signe constant puis additionne l'aire de chaque domaine pour obtenir l'aire totale.

Valeur moyenne

Soit f continue sur [a ; b] la valeur moyenne est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}t$$

Intégration Par Parties

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Pour savoir qu'elle primitive et dérivée on va chercher : méthode ALPES, avec L = logarithme, P = polynôme, E = exponentielle, S = cosinus et sinus.

On lit ALPES de gauche à droite la partie la plus à gauche sera dérivée et on cherchera la primitive de celle à droite. Exemple : si la fonction est f(x) = ln(x).sin(x) alors on dérive ln(x) et on cherche la primitive de sin(x).