Chapitre XV : Combinatoire et dénombrement

Le cardinal d'un ensemble fini :

Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments qu'il comporte.

→ On prend E un ensemble à n éléments, card(E)=n

Les ensembles disjoints :

Si deux ensemble A et B sont disjoints, $A \cap B = \varnothing$

La propriété de la réunion disjointe :

On prend les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ **deux à deux disjoints**.

→ $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$

→ $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k)$

Les n-uplets :

Une collection ordonnée de n objets est appelée n-uplet.

→ un n-uplet de deux éléments est un couple.

→ un n-uplet de trois éléments est un triplet.

Le produit cartésien :

$E, F, E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles.

→ $E \times F$ est l'ensemble des couples (a ; b) avec $a \in E$ et $b \in F$

→ $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ où $a_1 \in E_1, \dots, a_n \in E_n$

⚠️ $E \times E$ est noté E^2 et $E \times E \times \dots \times E$, n fois est noté E^n

Le principe multiplicatif :

$E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles.

$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_n)$

Pour l'ensemble E, $\text{card}(E^n) = \text{card}(E)^n$

La factorielle :

$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ $\quad$ $0! = 1$

Les arrangements de p éléments d'un ensemble E :

Soient E un ensemble à n éléments et $p \leqslant n$, p un entier.

Un arrangement de p éléments de E est un p-uplet d'**éléments distincts** de E.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les permutations d'un ensemble :

E est un ensemble à n éléments. Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E. Le nombre de permutations de E vaut n!

Partie(s) et combinaison(s) d'un ensemble :

Soit E un ensemble de n éléments et $p \leqslant n$, p un entier. Une partie de E est un sous ensemble de E. L'ensemble des parties de E est noté P(E).

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et vaut :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

À noter :

Relation de Pascal : si p>0 : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

Le nombre de parties de E est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$