**Corrigé du devoir maison n°2 – TSTI2D**

**<u>Exercice 1</u>** : Déterminer toutes les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes

a) $f(x) = \sin(3x)\ ;\ I = \mathbb{R}$ $\qquad F(x) = -\frac{\cos(3x)}{3} + k$

b) $g(x) = \frac{4x^3+2x}{(x^4+x^2+4)^2}\ ;\ I = \mathbb{R}$ $\qquad F(x) = -\frac{1}{(x^4+x^2+4)} + k$

c) $h(x) = 3x + 2 - \frac{1}{(x+5)^2}\ ;\ I = ]-\infty\ ;\ -5[$ $\qquad F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{(x+5)} + k$

d) $j(t) = sint cos^2 t\ ;\ I = \mathbb{R}$ $\qquad F(x) = -\frac{cos^3(t)}{3} + k$

e) $k(x) = (2x+1)(x^2+x+7)^3\ ;\ I = \mathbb{R}$ $\qquad F(x) = \frac{(x^2+x+7)^4}{4} + k$

**<u>Exercice 2 :</u>**

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

**a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$.**

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 8x + 7$ et $v(x) = (x+4)^2$ ; on utilise la formule $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On calcule : $u'(x) = 2x + 8$ et $v'(x) = 2 \times 1 \times (x+4) = 2(x+4)$

Ainsi : $f'(x) = \frac{(2x+8)(x+4)^2-(x^2+8x+7)2(x+4)}{((x+4)^2)^2} = \frac{(2x+8)(x^2+8x+16)-(2x+8)(x^2+8x+7)}{(x+4)^4} =$
$\frac{2x^3+16x^2+32x+8x^2+64x+128-2x^3-16x^2-14x-8x^2-64x-56}{(x+4)^4} = \frac{18x+72}{(x+4)^4} = \frac{18(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{18}{(x+4)^3}$

**b) Etudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variation de la fonction $f$.**

Comme $x > -4$ alors $(x+4) > 0$ ; la dérivée est donc toujours positive sur $]-4\ ;\ +\infty[$

| $x$ | $-4 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

**c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.**

- Le point d'intersection avec (Oy) a pour abscisse zéro, donc on calcule $f(0)$ :

$$f(0) = \frac{0^2 + 8 \times 0 + 7}{(0+4)^2} = \frac{7}{16}$$

Le point d'intersection avec (Oy) a pour coordonnées $\left(0\ ;\frac{7}{16}\right)$.

- Le point d'intersection avec (Ox) vérifie $f(x) = 0$.

Comme f est un quotient, seul le numérateur peut s'annuler.

On cherche les valeurs de $x$ telles que $x^2 + 8x + 7 = 0$ $\qquad \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 7 = 36$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-8-\sqrt{36}}{2\times 1} = -7$ et $x_2 = \frac{-8+\sqrt{36}}{2\times 1} = -1$

Or $f$ est définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ donc il n'y a qu'une solution : $x = -1$

Le point d'intersection de $f$ avec l'axe (Ox) a pour coordonnées (-1 ; 0)

**d) Calculer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.**

On calcule $f'(-1) = \frac{18}{(-1+4)^3} = \frac{2}{3}$ $\qquad f(-1) = 0$

L'équation de la tangente en -1 est : $y = \frac{2}{3}(x+1) + 0 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

**e) Montrer que pour tout $x \in ]-4\,;\,+\infty[$ on a : $f(x) = 1 - \frac{9}{(x+4)^2}$**

On transforme l'expression : $1 - \frac{9}{(x+4)^2} = \frac{(x+4)^2-9}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+16-9}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x+7}{(x+4)^2} = f(x)$

L'égalité est bien vérifiée.

**f) En déduire la primitive F de $f$ sur $]-4\,;\,+\infty[$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (-1 ; 0)**

Comme $f(x) = 1 - \frac{9}{(x+4)^2}$ ; $F(x) = x + \frac{9}{(x+4)} + k$ or F(-1) = 0 donc $-1 + \frac{9}{(-1+4)^2} + k = 0$ soit $k = 0$

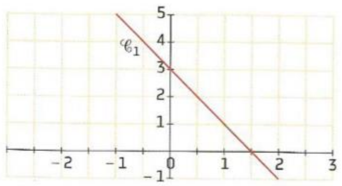
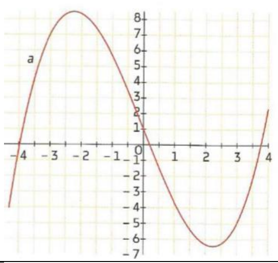
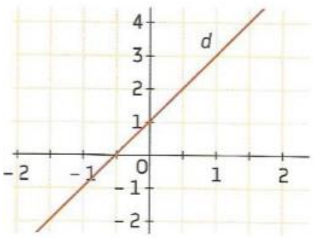
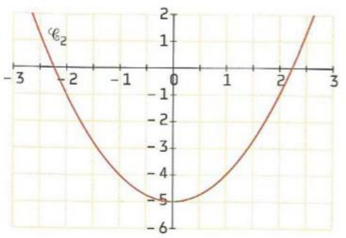
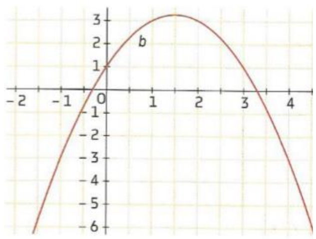
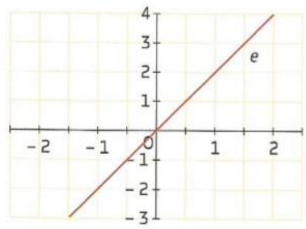
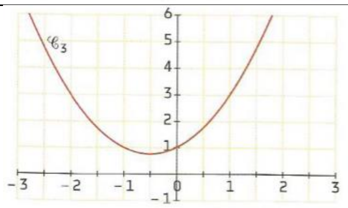
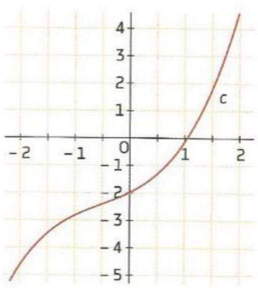
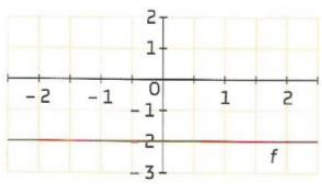
Ainsi la primitive de $f$ passant par (-1 ; 0) est $F(x) = x + \frac{9}{(x+4)}$

**<u>Exercice 3 :</u> Associer à chacune des courbes des fonctions, la courbe de l'une de ses primitives et la courbe de sa dérivée. Expliquer la démarche.**

A – La fonction est affine car sa représentation graphique est une droite donc sa dérivée est une constante de représentation graphique une droite parallèle à l'axe des abscisses, c'est la dérivée III.
La fonction est positive sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et négative sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$ ainsi sa primitive est croissante sur $]-\infty\,;1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$ ce qui correspond à la primitive 2. A – 2 - III

B – la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ par conséquent sa dérivée est négative sur $]-\infty\,;0]$ et positive sur $[0\,;\,+\infty[$ ce qui correspond à la dérivée II.
La fonction est positive, puis négative puis positive ainsi sa primitive sera croissante puis décroissante et ensuite croissante, seule la primitive 1 correspond à ces variations. B – 1 - II

C- – la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;-0{,}5]$ et croissante sur $[-0{,}5\,;\,+\infty[$ par conséquent sa dérivée est négative sur $]-\infty\,;-0{,}5]$ et positive sur $[-0{,}5\,;\,+\infty[$ ce qui correspond à la dérivée I.
La fonction est positive pour tout réel, donc sa primitive sera croissante pour tout réel, c'est la primitive 3. C – 3 - I

| | Fonctions | | Primitives | | Dérivée |
|---|---|---|---|---|---|
| A |  | 1 |  | I |  |
| B |  | 2 |  | II |  |
| C |  | 3 |  | III |  |