Note : ……../20	**Corrigé du devoir maison n°4**	Nom : Classe TSTI2D1

Exercice 1 :

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2+} x-3=-1 \\ \lim\limits_{x\to 2+} -2x^2+5x-2=0^- \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to 2+} \frac{x-3}{-2x^2+5x-2}=+\infty$

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x-3=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2x^2+5x-2=FI \end{cases}$ $donc \lim\limits_{x\to 2+} \frac{x-3}{-2x^2+5x-2}$ est une forme indéterminée

$\frac{x-3}{-2x^2+5x-2}=\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(-2x+5-\frac{2}{x}\right)}=\frac{1-\frac{3}{x}}{-2x+5-\frac{2}{x}}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 1-\frac{3}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2x+5-\frac{2}{x}=-\infty \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{-2x+5-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-3}{-2x^2+5x-2}=0-$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7x-1=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} (7x-1)^4=+\infty$ car la puissance est paire.

$\lim\limits_{x\to +\infty} 7x-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (7x-1)^4=+\infty$

d) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2}{x^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} 3=3 \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+3=+\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3=3 \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+3=3$

e) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} -x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x-2}=0^- \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to -\infty} -x+1+\frac{1}{x-2}=+\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2-} -x+1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 2-} \frac{1}{x-2}=-\infty \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to 2-} -x+1+\frac{1}{x-2}=-\infty$

Exercice 2 : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ car la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ car la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe.

1) Le tableau le signe de $f(x)$ quand x varie dans $]1\,;\,+\infty[$.

x	1		2		$6+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0 +

2) On admet que, pour tout x de $]1\,;\,+\infty[$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2}$, où a, b, c sont des constantes.

a. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} ax^2+bx+c=\pm\infty \quad selon\ le\ signe\ de\ a \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)^2=+\infty \end{cases}$ $\quad donc \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2}$ est une forme indéterminée

On factorise par x^2 : $f(x)=\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ or $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=a$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2}=a$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ et comme la limite est unique alors $a=1$

b. D'après le graphique $f(2)=0$ et $f(6)=0$

Or $f(2)=\frac{2^2+2b+c}{(2-1)^2}=0$ donc on a l'équation $2b+c+4=0$

Or $f(6)=\frac{6^2+6b+c}{(6-1)^2}=0$ donc on a l'équation $\frac{6b+c+36}{25}=0$ soit $6b+c+36=0$

On obtient le système : $\begin{cases} 2b + c + 4 = 0 \\ 6b + c + 36 = 0 \end{cases}$

c. Le système est : $\begin{cases} 2b + c + 4 = 0 \\ 6b + c + 36 = 0 \end{cases}$

On soustrait les deux équations : $\begin{cases} 2b + c + 4 = 0 \\ -4b - 32 = 0 \end{cases}$ soit $b = \frac{32}{-4} = -8$

On remplace b par sa valeur dans la 1ère équation : $2 \times (-8) + c + 4 = 0$ soit $c = 12$

Ainsi $f(x) = \frac{x^2-8x+12}{(x-1)^2}$

<u>Exercice 3</u> : Soit f la fonction telle que : $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2}$

1. f est définie lorsque $x^2 - x - 2 \neq 0$

Cherchons les valeurs pour lesquelles $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, le polynôme admet deux racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$

Ainsi l'ensemble de définition de f est : $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x + 3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - x - 2 = +\infty \end{cases}$ *donc le quotient est une forme indéterminée* $f(x) = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(x-1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{x-1-\frac{2}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{x-1-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x - 2 = FI \end{cases}$ $f(x) = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(x-1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{x-1-\frac{2}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{x-1-\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

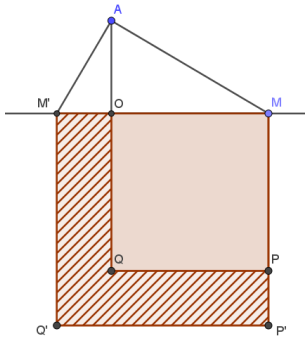
La courbe admet alors une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1-} x + 3 = 2 \\ \lim\limits_{x\to-1-} x^2 - x - 2 = 0^+ \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{x\to-1-} f(x) = +\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1+} x + 3 = 2 \\ \lim\limits_{x\to-1+} x^2 - x - 2 = 0^- \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{x\to-1+} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2-} x + 3 = 5 \\ \lim\limits_{x\to2-} x^2 - x - 2 = 0^- \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{x\to2-} f(x) = -\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2+} x + 3 = 5 \\ \lim\limits_{x\to2+} x^2 - x - 2 = 0^+ \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{x\to2+} f(x) = +\infty$

La courbe admet alors deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

<u>Exercice 4 : facultatif</u>



3. L'aire tend vers 2 lorsque M s'éloigne de O.

4.

a. $A_1(x) = x^2$

b. On sait que OA = 1 et que $OA = OM \times OM'$ donc $OM' = \frac{1}{x}$

c. $A_2(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right)^2$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (A2(x) - A1(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 - x^2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + 2 \times \frac{1}{x} \times x + x^2 - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + 2 = 2$

e. Ainsi lorsque M s'éloigne de O, l'aire de la partie hachurée tend bien vers 2.