Lycée Blaise Pascal

Nom : …………………………………
Prénom : ……………………………
Classe : ……………

Devoir commun 1S

Mardi 3 avril 2018

- *Les calculatrices sont autorisées, les échanges entre élèves sont interdits*.
- *Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Exercice 1 : QCM Trigonométrie.

Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition correcte parmi celles qui sont proposées. **(aucune démonstration n'est demandée)**

1) Parmi les mesures suivantes, laquelle est égale à $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π ? $a)\frac{5\pi}{3}$ $b)\frac{2\pi}{3}$ $c)\frac{4\pi}{3}$ $d)\frac{8\pi}{3}$
2) Si une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$ est $\frac{\pi}{6}$, une mesure de $(\vec{v},-\vec{u})$ est : $a)-\frac{5\pi}{6}$ $b)-\frac{\pi}{6}$ $c)\frac{7\pi}{6}$ $d)\frac{5\pi}{6}$.
3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ est égal à : $a)\sin x$ $b)-\sin x$ $c)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $d)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
4) Si $\sin x=\frac{1}{2}$ et $x\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ alors : $a)\cos x=\frac{3}{4}$ $b)\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $c)\cos x=-\frac{1}{2}$ $d)\cos x=\frac{1}{2}$

Exercice 2 : La boîte

Les parties A et B sont indépendantes.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x^2+9x$. On pose $g(x)=f(x)-f(1)$

PARTIE A:

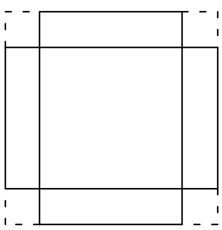
1) a) Calculer $g(x)$ en fonction de x.
   b) Montrer que pour tout réel x : $g(x)=(x-1)^2(x-4)$
2) a) Etablir le tableau de signes de $g(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x\le 4$, $f(x)\le 4$.

PARTIE B:

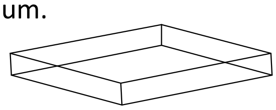
1) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
2) Encadrer alors $f(x)$ sur [0; 3].

PARTIE C:

On dispose d'une plaque carrée de 6 dm de côté. A chaque coin de la plaque, on découpe un carré de x dm de côté. On obtient alors le patron d'une boite ouverte.



1. Calculer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.
   Pour quelles valeurs de x, ce calcul est-il valable ?
2. En utilisant les résultats des parties précédentes, déterminer pour quelle valeur de x on obtient la boîte de plus grand volume. Préciser ce volume maximum.



Lycée Blaise Pascal

<u>Exercice 3</u> : Suites

Une personne a placé un capital de 10 000 € le 01/01/2010 sur un compte. Ce compte rapporte 4% d'intérêts par an ; cela signifie qu'une somme de 100 € placée au 01/01/2010 rapportera 4 € au 01/01/2011. Chaque année les intérêts s'ajoutent au capital et deviennent à leur tour générateurs d'intérêts.

On appelle alors C_n le capital au 01/01 de l'année 2010+*n* ; en particulier $C_0 = 10000$.

1) Calculer C_1 et C_2.
2) Montrer que $C_{n+1} = 1,04 \times C_n$.
3) En déduire l'expression de C_n en fonction de *n*. Que vaut le capital au 01/01/2020 ? Arrondir au dixième

On suppose que la personne rajoute 1000 € sur son compte au 01/01 de chaque année à compter du 01/01/2011.

On appelle alors D_n le capital au 01/01 de l'année 2010+*n* ; en particulier $D_0 = 10000$.

4) Justifier que $D_2 = 12856$.
5) Voici un algorithme écrit en langage naturel :
   Quel est le rôle de l'algorithme ?

```
N prend la valeur 0
D prend la valeur 10000
Tant que N<7
    N prend la valeur N+1
    D prend la valeur 1,04D+1000
Fin de la boucle
Afficher D
```

6) Donner l'expression de D_{n+1} en fonction de D_n.
7) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = D_n + 25000$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04.
8) Déduire de la question 6) que $D_n = 35000 \times 1,04^n - 25000$. Calculer la valeur affichée par l'algorithme.

<u>Exercice 4</u> : Tous éco-responsables !

Dans une ville comportant 15 000 foyers, une enquête portant sur les habitudes en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif ;
- Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30% consomment des produits bio ;
- Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note les événements :
T : « Le foyer pratique le tri sélectif » ;
B : « Le foyer consomme des produits bio ».

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

	Pratique le tri sélectif	Ne pratique pas le tri sélectif	Total
Consomme des produits bio			
Ne consomme pas des produits bio			
Total			

2. Déterminer $p(T)$, $p(\overline{T} \cap B)$ et $p(T \cap B)$
3. Justifier que $p(B) = 0{,}24$.
4. Cette ville décide de favoriser les foyers ayant un comportement éco-citoyen.
   Pour cela, elle offre chaque année un chèque de 50€ aux foyers pratiquant le tri sélectif et un chèque de 20€ aux foyers consommant des produits bio (les deux récompenses pouvant être cumulées).

Soit S la somme d'argent reçue par un foyer choisi au hasard.

   a) Donner les différentes valeurs de S.
   b) Déterminer la loi de probabilité de S.
   c) Montrer que l'espérance de S est égale à 39,8. Interpréter ce résultat
5. La ville dispose d'un budget de 500 000 € pour cette opération.
   a) Ce budget est-il suffisant ? Justifier.
   b) Proposer une solution chiffrée au gestionnaire de cette opération afin que le budget soit respecté.

Correction CONTROLE COMMUN 1S

Exercice 1 : QCM Trigonométrie

1) Parmi les mesures suivantes, laquelle est égale à $-\dfrac{2\pi}{3}$ modulo 2π ? C) $\frac{4\pi}{3}$
2) Si une mesure de $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est $\dfrac{\pi}{6}$, une mesure de $\left(\vec{v},-\vec{u}\right)$ est : d) $\frac{5\pi}{6}$.
3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ est égal à : b) $-\sin x$
4) Si $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors : b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 : Les parties A et B sont indépendantes.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. On pose $g(x) = f(x) - f(1)$

PARTIE A:

1) a) Pour tout réel x : $g(x) = f(x) - f(1) = x^3 - 6x^2 + 9x - (1^3 - 6 \times 1^2 + 9 \times 1)$
$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - (1 - 6 + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.
   b) Pour tout réel x : $(x-1)^2(x-4) = (x^2 - 2x + 1)(x - 4) = x^3 - 2x^2 + x - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 6x^6 + 9x - 4 = g(x)$
   $g(x) = (x-1)^2(x-4)$
2) a) on a le tableau de signe ci-contre :
   b) Pour tout $x \leq 4$: $g(x) \leq 0$ donc $f(x) - 4 \leq 0$ soit $f(x) \leq 4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

PARTIE B:

1) Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

   $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 4x + 3$

   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = 2^2$

   donc $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$

   d'où le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2) On déduit du tableau de variations que pour $x \in [0;3]$, on a $0 \leq f(x) \leq 4$.

PARTIE C:

1) La boîte a pour volume $v(x) = (6-2x)^2 \times x = (36 - 24x + 4x^2) \times x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$. Ce calcul est valable pour $x \in [0;3]$.
2) On a $v(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4(x^3 - 6x^2 + 9) = 4f(x)$ donc la boite a un volume maximal pour $x = 1$ et ce volume est de $4 \times 4 = 16\ dm^3$.

Exercice 3 : Suites

1) On a $C_1 = 10000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 10000 \times 1{,}04 = 10\,400$ $C_2 = 10\,400 \times 1{,}04 = 10\,816$.
2) On a pour tout réel n : $C_{n+1} = \left(1 + \frac{4}{100}\right) C_n = 1{,}04 C_n$.

3) On en déduit que (C_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premeier terme $C_0 = 10\,000$ donc pour tout entier n : $C_n = 10\,000 \times 1{,}04^n$.
Le capital en 2 020 est $C_{10} = 10\,000 \times 1{,}04^{10} = 14\,802{,}40$ €.

4) On a $D_1 = 10\,000 \times 1{,}04 + 1000 = 10\,400 + 1\,000 = 11\,400$
$D_2 = 11\,400 \times 1{,}04 + 1000 = 12\,856$.

5) Cet algorithme calcule et affiche D_6.

6) Pour tout réel n : $D_{n+1} = 1{,}04 D_n + 1000$, donc
$$u_{n+1} = 1{,}04 D_n + 1000 + 25000 = 1{,}04 D_n + 26000 = 1{,}04\left(D_n + \frac{26000}{1{,}04}\right) = 1{,}04(D_n + 25000)$$
Ainsi $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,04.

7) Pour tout entier n : $u_n = u_0 \times 1{,}04^n = 35000 \times 1{,}04^n$ ainsi
$D_n = u_n - 25\,000 = 35000 \times 1{,}04^n - 25\,000$
La valeur affichée par l'algorithme est donc $D_6 = 35000 \times 1{,}04^6 - 25\,000 = 19\,286{,}2$

<u>Exercice 4</u> : Tous éco-responsables !

Dans une ville comportant 15 000 foyers, une enquête portant sur les habitudes en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 10 500 foyers pratiquent le tri sélectif ;
- Parmi les foyers pratiquant le tri sélectif, 30% consomment des produits bio ;
- Parmi les foyers ne pratiquant pas le tri sélectif, 450 consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note les événements :
T : « Le foyer pratique le tri sélectif » ;
B : « Le foyer consomme des produits bio ».

1. Présentons les données de l'énoncé dans un tableau :

	Pratique le tri sélectif	Ne pratique pas le tri sélectif	Total
Consomme des produits bio	$10\,500 \times \frac{30}{100} = 3\,150$	450	$3\,150 + 450 = 3\,600$
Ne consomme pas des produits bio	$10\,500 - 3\,150 = 7\,350$	$4\,500 - 450 = 4\,050$	$7\,350 + 4\,050 = 11\,400$
Total	$10\,500$	$15\,000 - 10\,500 = 4\,500$	$15\,000$

On a $p(T) = \frac{10\,500}{15\,000} = \frac{7}{10} = 0{,}7$, $p(\overline{T} \cap B) = \frac{450}{15\,000} = \frac{27}{100} = 0{,}03$ et $p(T \cap B) = \frac{3\,150}{15\,000} = \frac{21}{100} = 0{,}21$

2. On a $p(B) = p(B \cap T) + p(B \cap \overline{T}) = 0{,}21 + 0{,}03 = 0{,}24$.
3. Cette ville décide de favoriser les foyers ayant un comportement éco-citoyen.
Pour cela, elle offre chaque année un chèque de 50€ aux foyers pratiquant le tri sélectif et un chèque de 20€ aux foyers consommant des produits bio (les deux récompenses pouvant être cumulées).

Soit S la somme d'argent reçue par un foyer choisi au hasard.

a) Les différentes valeurs de S sont 0; 20; 50 et 70.

b) D'après le tableau précédent on a :

s	0	20	50	70
$P(S = s)$	$\frac{4\,050}{15\,000} = 0{,}27$	$p(\overline{T} \cap B) = 0{,}03$	$\frac{7\,350}{15\,000} = 0{,}49$	$p(T \cap B) = 0{,}21$

c) On a $E(S) = 0 \times 0{,}27 + 20 \times 0{,}03 + 50 \times 0{,}49 + 70 \times 0{,}21 = 39{,}8$.
Cela signifie qu'en moyenne les habitants vont recevoir 39,8€.

4. La ville dispose d'un budget de 500 000 € pour cette opération.

a) Il y a 15 000 habitants donc cette opération représente un budget de $15\,000 \times 39{,}8 = 597\,000$ €, donc le budget prévu est insuffisant.

b) Afin que le budget soit suffisant on pourrait passer la prime aux personnes pratiquant le tri sélectif à 40€. On aurait alors un coût moyen égal à $0 \times 0{,}27 + 20 \times 0{,}03 + 40 \times 0{,}49 + 60 \times 0{,}21 = 32{,}8$ ce qui donnerai un budget global de 492 000€.