Les suites	**Corrigé du devoir maison n°1**	Nom : Classe : TS2

<u>Exercice 1 :</u>

1. On démontre par récurrence que $u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

<u>Initialisation :</u> $u_0 = 13$ et $1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 + 12 = 13$

La proposition est vraie pour $n = 0$

<u>Hérédité</u> :

- Hyp de récurrence : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^k$
- Au rang $k+1$: $u_{k+1} = \frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5}$

  On utilise l'hypothèse de récurrence,

$$u_{k+1} = \frac{1}{5}\left(1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^k\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} + \frac{4}{5} = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$$

  La proposition est vraie au rang $k+1$.
- Conclusion : la proposition est vraie au rang $n = 0$, elle est héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel.

  $u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - \left(1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{5} - 1\right) = 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\left(-\frac{4}{5}\right)$$

Cette expression est négative, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

- $u_n = 1 + 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 12 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

  Et par addition, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

<u>Exercice 2 :</u>

1. On calcule $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3$

Comme n est un entier naturel, il est positif donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier naturel n et donc la suite est croissante.

2. On montre par récurrence que $u_n > n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$

La proposition est vraie au rang $n = 0$.

<u>Hérédité</u> :

- Hyp de récurrence : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k > k^2$
- Au rang $k+1$: Par hypothèse $u_k > k^2$ donc en additionnant dans les deux membres, on obtient

$$u_k + 2k + 2 > k^2 + 2k + 3 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

<u>Conclusion</u> : la proposition est vraie au rang $n = 0$, elle est héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel, $u_n > n^2$.

3. Comme , $u_n > n^2$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

<u>Exercice 3 :</u>

a) La limite est une forme indéterminée. On factorise :

$$u_n = \frac{5n^6 - 4n^4 + 12n - 105}{3n^6 - 40n + 1} = \frac{n^6\left(5 - \frac{4}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{105}{n^6}\right)}{n^6\left(3 - \frac{40}{n^5} + \frac{1}{n^6}\right)} = \frac{5 - \frac{4}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{105}{n^6}}{3 - \frac{40}{n^5} + \frac{1}{n^6}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \frac{4}{n^2} + \frac{12}{n^3} - \frac{105}{n^6} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{40}{n^5} + \frac{1}{n^6} = 3$. En faisant le quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$

la limite de $\frac{7-n}{n+1}$ est une forme indéterminée. On factorise $\frac{7-n}{n+1} = \frac{n\left(\frac{7}{n}-1\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{7}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Par quotient et addition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

c) La limite est une forme indéterminée, on factorise :

$u_n = 6^n\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 6^n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

d) La suite $(\cos n)$ n'a pas de limite.

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

On additionne 5 dans chaque membre : $4 \leq 5 + \cos n \leq 6$ donc $\frac{4}{n} \leq \frac{5+\cos n}{n} \leq \frac{6}{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

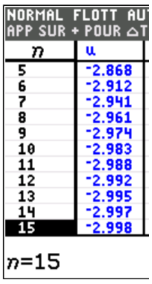
<u>Exercice 4 :</u>

1. Les cinq premiers termes d'une suite de terme initial u_0 vont de u_0 à u_4 et non u_5 !

$u_0 = -2$; $u_1 = \frac{2}{3} \times (-2) - 1 = -\frac{4}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$; $u_2 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) - 1 = -\frac{14}{9} - 1 = -\frac{23}{9}$

$u_3 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{23}{9}\right) - 1 = -\frac{46}{27} - 1 = -\frac{73}{27}$ et $u_4 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{73}{27}\right) - 1 = -\frac{146}{81} - 1 = -\frac{227}{81}$

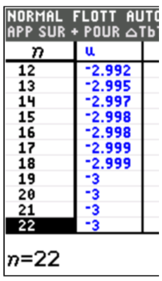
2. Tableau de valeurs



NORMAL FLOTT AU
APP SUR + POUR △T

n	u
5	-2.868
6	-2.912
7	-2.941
8	-2.961
9	-2.974
10	-2.983
11	-2.988
12	-2.992
13	-2.995
14	-2.997
15	-2.998

n=15



NORMAL FLOTT AUTO
APP SUR + POUR △Tb

n	u
12	-2.992
13	-2.995
14	-2.997
15	-2.998
16	-2.998
17	-2.999
18	-2.999
19	-3
20	-3
21	-3
22	-3

n=22

3. a) Pour montrer que (v_n) est une suite géométrique, on calcule v_{n+1} en fonction de v_n.

$$v_{n+1} = 4u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n$$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de terme initial $v_0 = u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$

3.b) On peut écrire $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ comme $v_n = u_n + 3$ alors $u_n = v_n - 3$

Et donc $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$

4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $-1 < q = \frac{2}{3} < 1$

Donc par addition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$