Corrigés : Exercices de révision – Test commun décembre 2019

Exercice 1 : Polynésie septembre 2019

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

1. On a $T_0 = 0,9$, puis $T_1 = T_0 - 0, T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = 0,819$;
$T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0,751924 \approx 0,752$; $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx 0,695$ et enfin $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx 0,647$.
Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. **a.** La fonction polynôme f est dérivable sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$.
Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,2x \leqslant 0,2 \Rightarrow -0,2 \leqslant -0,2x \leqslant 0 \Rightarrow 0,8 \leqslant 1 - 0,2x \leqslant 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0; 1]$: la fonction f est donc croissante sur $[0; 1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$.

   b. *Initialisation* : on a vu que $0 < 0,819 < 0,9 < 1$ ou $0 < T_1 < T_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0;
Hérédité supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$0 < T_{n+1} < T_n < 1$. par croissance de la fonction f on a :
$f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$ ou $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$.
On a donc $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

   c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

   d. La calculatrice donne $T_{14} \approx 0,385$: les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0,31$

Exercice 2 : Antilles sept 2019

Partie A

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.
Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

> $p_{22} = 22^2 - 42 \times 22 + 4 = -436$ et $p_{23} = 23^2 - 42 \times 23 + 4 = -433$
> $p_{22} < p_{23}$ donc la suite (p_n) n'est pas décroissante.
> **Affirmation 1 fausse**

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

> Pour tout n, $v_n = u_n^2 - 1$ donc $u_n^2 = v_n + 1$.
> $$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}\left(u_n^2+8\right) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 + \frac{8}{9} - 1 = \frac{1}{9}(v_n+1) - \frac{1}{9}$$
> $$= \frac{1}{9}v_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}v_n$$
> Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{9}$.
> **Affirmation 2 vraie**

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.
Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

> Pour tout n non nul,
> $$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n \iff \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$
> $$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$$
> $$\iff \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
> $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$
> D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.
> Donc la suite (w_n) converge.
> **Affirmation 3 vraie**

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. $U_1 = \frac{2U_0}{1+U_0} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

2. On va démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n : U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, $\frac{2^n}{1+2^n} = \frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
On suppose la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque; on va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.
$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} = \frac{2\frac{2^n}{1+2^n}}{1+\frac{2^n}{1+2^n}} = \frac{2\times 2^n}{1+2^n} \times \frac{1+2^n}{1+2^n+2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n+1$ valeurs; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1}. L'algorithme 2 ne convient donc pas.

Exercice 3 : Amérique du Sud nov 2019

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= 3 - \dfrac{10}{u_n+4} \end{cases}$

Partie A :

1. • Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$;

   • Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.

2. Démonstration par récurrence;

   Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro;

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.

   $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \iff$

   $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3-2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.

   La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.

   Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2; il se factorise donc en :

   $-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n+1)(u_n+2)$ et finalement :

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{3 - \frac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \frac{10}{u_n+4} + 2} = \dfrac{2 - \frac{10}{u_n+4}}{5 - \frac{10}{u_n+4}} = \dfrac{\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}}{\frac{5u_n+20-10}{u_n+4}} =$

   $\dfrac{\frac{2u_n-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u_+4}} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{2}{5}v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+2} = \dfrac{4}{7}$.

   b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}4^n = \dfrac{4}{7} \times 0{,}4^n$.

   Comme $\dfrac{4}{7} < 1$ et $0{,}4 < 1$ et par conséquent $0{,}4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

2. On part de la définition :

   $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2} \iff v_n(u_n+2) = u_n - 1 \iff v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \iff$

   $v_n u_n - u_n = -2v_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \dfrac{-2v_n-1}{v_n-1} \iff u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$

   car $v_n \neq 1$.

3. $v_n = \dfrac{4}{7} \times 0{,}4^n$. On sait comme $0 < 0{,}4 < 1$ que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$ et finalement

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
   n ← n+1
   u ← 3 − 10/(u+4)
Fin du Tant que
```

1. À la fin on a $n = 6$.
2. La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 : on a $u_5 \approx 1{,}017$; la valeur suivante est inférieure à 1,01 : $u_6 \approx 1{,}008$.

Exercice 4 : Sujet B p.97

Sujet B

1. Dans le triangle ABD rectangle en B,

$\sin\alpha = \frac{BD}{AD}$ et $\cos\alpha = \frac{4}{AD}$ d'où $BD = \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$CD = CB + BD = 7 + \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et $AD = \frac{4}{\cos\alpha}$.

2. $t_1 = \frac{CD}{60\ 000} = \frac{7+\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}{60\ 000} = \frac{7}{60\ 000} + \frac{4\sin\alpha}{60\ 000\cos\alpha}$.

$t_2 = \frac{AD}{30\ 000} = \frac{4}{30\ 000\cos\alpha}$.

3. $t_1 > t_2$ équivaut à $\frac{7}{60\ 000} + \frac{4\sin\alpha}{60\ 000\cos\alpha} - \frac{4}{30\ 000\cos\alpha} > 0$ et donc à $f(\alpha) > 0$.

4. $f'(\alpha) = 2\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 4\frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2} = \frac{2(1-2\sin\alpha)}{(\cos\alpha)^2}$.

Comme $(\cos\alpha)^2 > 0$, $f'(\alpha)$ est du signe de $1 - 2\sin\alpha$.

5.

α	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
f	$-0,5$	$\nearrow$	$3,5-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0,036$. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ donc pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, le lapin a le temps de traverser.

Exercice 6 :

1. a. $z_0 = 2$;

$z_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $z_2 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$; $z_3 = 1 - \frac{1}{-1} = 2$; $z_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $z_5 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$; $z_6 = 1 - \frac{1}{-1} = 2$

1. b. $z_0 = i$;

$z_1 = 1 - \frac{1}{i} = \frac{i-1}{i} = \frac{-1-i}{-1} = 1 + i$; $z_2 = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;
$z_3 = 1 - \frac{1}{\frac{i+1}{2}} = 1 - \frac{2}{i+1} = \frac{i+1-2}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1-1+i}{2} = i$; $z_4 = 1 - \frac{1}{i} = \frac{i-1}{i} = \frac{-1-i}{-1} = 1 + i$
$z_5 = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_6 = 1 - \frac{1}{\frac{i+1}{2}} = 1 - \frac{2}{i+1} = \frac{i+1-2}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1-1+i}{2} = i$

1. c. Dans les deux exemples précédents, on obtient $z_3 = z_6 = z_0$; on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
On montre cette égalité par récurrence :

- Initialisation : Pour $n = 0$; $z_{3n} = z_{3\times 0} = z_0$; la proposition est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un rang k tel que $z_{3k} = z_0$
  - Au rang $k+1$: $z_{3(k+1)} = z_{3k+3} = 1 - \frac{1}{z_{3k+2}} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{z_{3k+1}}} = 1 - \frac{z_{3k+1}}{z_{3k+1}-1} = \frac{z_{3k+1}-1-z_{3k+1}}{z_{3k+1}-1} = \frac{-1}{z_{3k+1}-1}$
    $$\frac{-1}{z_{3k+1}-1} = \frac{-1}{1-\frac{1}{z_{3k}}-1} = z_{3k} = z_0$$
- Conclusion : On a montré que l'égalité est vraie au rang $n = 0$ et qu'elle est héréditaire donc $z_{3n} = z_0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Comme $2019 = 3 \times 673$ alors d'après la question précédente $z_{2019} = z_0 = 1 + i$

3. Si $z_0 = z_1$ ceci est équivalent à $1 - \frac{1}{z_0} = z_0$ avec $z_0 \neq 0$; soit $z_0^2 - z_0 + 1 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

Comme le discriminant est négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_0{}' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, il y a deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_0 = z_1$; $z_0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_0{}' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Dans ce cas, si $z_0 = z_1$ alors $z_2 = 1 - \frac{1}{z_1} = 1 - \frac{1}{z_0} = z_1$ etc… la suite (z_n) sera une suite constante.

Exercice 7 : Pondichéry Avril 2017

Solution :
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c < 0$ car $c > 9$ donc (E) admet deux solutions complexes non réelles

Solution : Les solutions de (E) sont conjuguées de la forme $z_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

$z_1 = \dfrac{6 + \mathrm{i}\sqrt{4c - 36}}{2} = \dfrac{6 + 2\mathrm{i}\sqrt{c-9}}{2} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9} = z_\mathrm{A}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_\mathrm{A}} = z_\mathrm{B}$

Solution : $\mathrm{OB} = |z_\mathrm{B}| = |\overline{z_\mathrm{A}}| = |z_\mathrm{A}| = \mathrm{OA}$
OAB est donc bien isocèle en O

Solution : OAB est rectangle en O si et seulement si $\mathrm{AB}^2 = 2\mathrm{OA}^2$ car on sait qu'il est isocèle en O
$\mathrm{AB}^2 = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|^2 = \left|2\mathrm{i}\sqrt{c-9}\right|^2 = 4(c-9)$ et $2\mathrm{OA}^2 = 2|z_\mathrm{A}|^2 = 2 \times (9 + c - 9) = 2c$
$\mathrm{AB}^2 = 2\mathrm{OA}^2 \iff 4(c-9) = 2c \iff c = 18$
OAB est donc rectangle si et seulement si $c = 18$