Exercices de révision – Test commun décembre 2019

Exercice 1 : Polynésie septembre 2019

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.
Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.
On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.
Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.
   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
   b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.
   c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
   d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B : exercice 2

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Exercice 2 : Antilles sept 2019

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par
$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$
   Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.
2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
   - $U_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$;
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

   Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.
3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,
$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$
   Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,
$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$U_n = \frac{2^n}{1+2^n}.$$
3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.
   Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Exercice 3 : Amérique du Sud nov 2019

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_{n+1} & = & 3-\dfrac{10}{u_n+4} \\ u_0 & = & 5 \end{cases}$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-contre.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
   n ← n + 1
   u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

Exercice 4 :

Sujet B p.97

Exercice 5 : revoir étude de fonction contrôle 3

Exercice 6 :

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}$$

1. a. Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question, on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
   Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ? Prouver cette conjecture.

2. Déterminer z_{2019} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 7 : Pondichéry Avril 2017

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 6z + c = 0$$

   où c est un réel strictement supérieur à 9.

   a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

*

Questions 2) 3) hors programme Test commun déc 2019