Chapitre 6 - Compléments de la dérivation

I. Formulaire des dérivées

Dérivées des fonctions simples

- $D_f = R$ et $D_{f'} = R$

f(x) = k → f'(x)=0
f(x) = x → f'(x)=1
f(x) = x^2 → f'(x)= 2x
f(x) = x^n → f'(x)=n x^{n-1}
f(x) = cos x → f'(x) = - sin x
f(x) = sin x → f'(x) = cos x

- *$D_f = [\ 0\ ;+\infty\ [$ et $D_{f'} =]\ 0\ ;+\infty\ [$*

f(x)=$\sqrt{x}$ → f'(x) =$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $D_f = R\backslash\{0\}$ et $D_f = R\backslash\{0\}$

f(x) = $\frac{1}{x}$ → f'(x) = $-\frac{1}{x^2}$

Dérivées des fonctions composées :

Soient *u* et *v* deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I de R, *k* un nombre réel et *n* un nombre entier non nul.

(u + v)' = u' + v'
(ku)' = k u'
(uv)' = u' v + u v'
(u n)'= n u' u $^{n-1}$ (*n*≠0)
$(u^2)'$ = 2 u' u
$(u^3)'$ = 3 u' u^2
$(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$ pour *v(x)* ≠ 0
$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ pour *v(x)* ≠ 0
$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour *u(x)* > 0
[cos (u)]' = – u' sin (u)
[sin (u)]' = u' cos (u)

II. Dérivées des fonctions $\sqrt{u}$ et $u^n (n \in \mathbb{Z}^*)$

Théorème : Dérivée de la racine carrée d'une fonction

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Théorème : Dérivée d'une fonction à la puissance n

u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel

Si $n \geq 2$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

Si $n \geq 1$, alors la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \times \frac{u'}{u^{n+1}}$, on peut aussi écrire : $(u^{-n})' = -n \times u' \times u^{-n-1}$

III. Dérivée d'une fonction composée par une fonction affine

Théorème : dérivée d'une composée par une fonction affine

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a, b deux nombres réels avec $a \neq 0$

La fonction $g: x \to f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = af'(ax+b)$

Fonctions trigonométriques

La dérivée de la fonction $x \to cos(ax+b)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est $x \to -asin(ax+b)$

La dérivée de la fonction $x \to sin(ax+b)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est $x \to acos(ax+b)$