CHAPITRE III : LIMITE DE FONCTION

Définition : limite en un réel a

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

- Dire que f admet une limite à gauche en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs inférieures, f tend vers cette limite : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a,\, x<a} f(x) = L$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite à droite en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, f tend vers cette limite : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a,\, x>a} f(x) = L$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite en a, lorsque les limites à gauche et à droite sont égales.

Définition d'une fonction composée

f est une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.
La fonction composée f suivie de g est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$

$$h : I \to J \to \mathbb{R},\ x \to g(x) \to f(g(x))$$

Définition d'une asymptote horizontale

On dit que la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$,
elle est asymptote à la courbe en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Définition d'une asymptote verticale

On dit que la droite d'équation $x = L$ est une **asymptote verticale** à la courbe en a lorsque $\lim\limits_{x \to L} f(x) = \pm\infty$

Théorème des limites d'une fonction composée

Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v(u(x)) = c$

Théorème "des gendarmes"

f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]A\ ;\ +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), ℓ désigne un nombre réel.
Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Théorème de comparaison à l'infini

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]A\ ;\ +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$)
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$