Lundi 14 octobre 2019

Suites - Complexes	**Corrigé du contrôle n°2**	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 :

Partie A

1. La formule est : $\frac{5}{4} \times B_3 - \frac{1}{4} \times B_2$.

2. $u_2 = \frac{5}{4}u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{5}{4} \times 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{27}{4} = 6{,}75$ $\qquad$ $u_3 = \frac{5}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_1 = \frac{5}{4} \times \frac{27}{4} - \frac{1}{4} \times 6 = \frac{111}{16} \approx 6{,}938$

$u_4 = \frac{5}{4}u_3 - \frac{1}{4}u_2 = \frac{5}{4} \times \frac{111}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{27}{4} = \frac{447}{64} \approx 6{,}984$ $\qquad$ $u_5 = \frac{5}{4} \times \frac{447}{64} - \frac{1}{4} \times \frac{111}{16} = \frac{1791}{256} \approx 6{,}996$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers la valeur 7.

Partie B

1. a) Pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n$ ce qui prouve que (v_n) est une suite constante.

1. b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{21}{4}$

On en déduit que $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4}$ $\qquad$ soit $\qquad$ $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$

2. a) <u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 3 < u_1 = 6 < 15$

La proposition est vraie au rang $n = 0$.

<u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k < u_{k+1} < 15$

Au rang $k + 1$: d'après l'hypothèse de récurrence

$$u_k < u_{k+1} < 15$$

$$\frac{1}{4}u_k < \frac{1}{4}u_{k+1} < 15 \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}u_k + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{k+1} + \frac{21}{4} < 15 \times \frac{1}{4} + \frac{21}{4}$$

$$u_{k+1} < u_{k+2} < 9 < 15$$

La proposition est vraie au rang $k + 1$

<u>Conclusion</u> : La proposition est initialisée au rang $n = 0$, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

2. b) D'après la question précédente, on en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée.

Or d'après le théorème de convergence monotone, on en conclut que la suite est convergente.

3. a) $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 7) = \frac{1}{4}w_n$

Ainsi la suite (w_n) est une suite géométrique de raison ¼ et de terme initial $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

3. b) $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$

Or (w_n) est une suite géométrique donc $w_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Donc $u_n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 7 = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

3. c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ car c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1\,;1[$

Donc $\lim_{n\to+\infty} 7-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 7$.

Ainsi la suite (u_n) converge bien vers 7 comme prévu dans la conjecture.

<u>Exercice 2 :</u>

$$Z_1 = (3-i)^2 - (6i+4) = 9-6i-1-6i-4 = 4-12i$$

$$Z_2 = \frac{2-5i}{3+2i} = \frac{(2-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-15i-10}{13} = \frac{-4}{13} - i\frac{19}{13}$$

<u>Exercice 3 :</u>

1. $\frac{z-2i}{z+2} = 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-2i = 4i(z+2) \\ z+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-4iz = 8i+2i \\ z \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{10i}{1-4i} \\ z \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{10i(1+4i)}{17} \\ z \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{40}{17} + i\frac{10}{17} \\ z \neq -2 \end{cases}$

La solution de l'équation est $z = -\frac{40}{17} + i\frac{10}{17}$

2. $(iz-2+i)(2i\bar{z}+i-2) = 0$

Un produit est nul ssi l'un des facteurs est nul :

$iz-2+i = 0$ ou $2i\bar{z}+i-2 = 0$

Soit $z = \frac{2-i}{i} = -1-2i$ ou $\bar{z} = \frac{2-i}{2i} = \frac{(2-i)(-2i)}{4} = -\frac{1}{2} - i$ donc $z = -\frac{1}{2} + i$

Les solutions de l'équation sont : $\{-1-2i\,;\, -\frac{1}{2}+i\}$

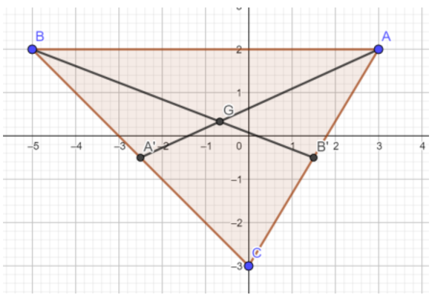
3. $z^2 - 2z + 3 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 3 = 4-12 = -8 < 0$

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \frac{2-i\sqrt{8}}{2} = 1-i\sqrt{2}$ et $z_2 = \frac{2+i\sqrt{8}}{2} = 1+i\sqrt{2}$

<u>Exercice 4 :</u>



b) $z_{A'} = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{-5+2i+(-3i)}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$

$$z_{B'} = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i+(-3i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

c) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Les deux vecteurs égaux ont la même affixe :

$$z_G - z_A = \frac{2}{3}(z_{A'} - z_A) = \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{2} - \frac{i}{2} - 3 - 2i\right)$$

Donc $z_G = 3+2i-\frac{11}{3}-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{i}{3}$ G a pour affixe $-\frac{2}{3}+\frac{i}{3}$. Il s'appelle le centre de gravité du triangle.

d) Calcul de l'affixe de $\overrightarrow{BG}$: $z_{\overrightarrow{BG}} = z_G - z_B = -\frac{2}{3}+\frac{i}{3}+5-2i = \frac{13}{3}-\frac{5}{3}i$

Calcul de l'affixe de $\overrightarrow{BB'}$: $z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = \frac{3}{2}-\frac{i}{2}+5-2i = \frac{13}{2}-\frac{5}{2}i$

On obtient : : $z_{\overrightarrow{BG}} = \frac{2}{3}\, z_{\overrightarrow{BB'}}$ donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\times\overrightarrow{BB'}$, les vecteurs sont colinéaires donc les points B, B' et G sont alignés.