Suites - Complexes *Limites de fonctions*	**Corrigé du devoir maison n°3**	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 :

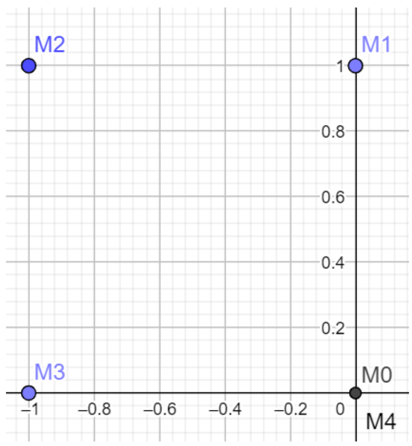
1. a) $z_1 = \lambda z_0 + i = \lambda \times 0 + i = i$
$z_2 = \lambda z_1 + i = \lambda i + i = (\lambda + 1)i$
$z_3 = \lambda z_2 + i = \lambda(\lambda + 1)i + i = (\lambda^2 + \lambda)i + i = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$
1. b) On montre par récurrence que $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} i$

Initialisation : Au rang $n = 0$, $\frac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1} i = 0$ et $z_0 = 0$
La proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k tel que $z_k = \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} i$
Au rang $k + 1$:
$z_{k+1} = \lambda z_k + i = \lambda \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} i + i = \frac{\lambda^{k+1} - \lambda}{\lambda - 1} i + i = \left(\frac{\lambda^{k+1} - \lambda}{\lambda - 1} + 1\right) i = \left(\frac{\lambda^{k+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1}\right) i = \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1} i$
La proposition est vraie au rang $k + 1$

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc pour tout entier naturel n, $z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} i$

2. a) $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i = (i^2 + i + 1)i = (-1 + i + 1)i = -1$
$z_4 = \lambda z_3 + i = i(-1) + i = 0$ ainsi $z_4 = z_0$
2. b) Pour tout entier naturel n, $z_{n+4} = \frac{\lambda^{n+4} - 1}{\lambda - 1} i = \frac{i^{n+4} - 1}{i - 1} i = \frac{i^n \times i^4 - 1}{i - 1} i = \frac{i^n - 1}{i - 1} i = z_n$
2. c) M_0 a pour affixe $z_0 = 0$; M_1 a pour affixe $z_1 = i$;
M_2 a pour affixe $z_2 = (\lambda + 1)i = (i + 1)i = -1 + i$
M_3 a pour affixe $z_3 = -1$ et M_4 a pour affixe $z_4 = 0$



Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ est une forme indéterminée.

On utilise la quantité conjuguée :

$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 4x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} = +\infty$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$ est une forme indéterminée

On utilise la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{(\sqrt{x^2+4x} - x)(\sqrt{x^2+4x} + x)}{\sqrt{x^2+4x} + x} = \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2+4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} + x}$

Cette limite en +infini est toujours une forme indéterminée

On factorise par x^2 dans la racine carrée : $\sqrt{x^2+4x}+x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x=x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x$

On factorise par x : $x\left(1+\frac{4}{x}\right)+x=x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)$

Ainsi l'expression devient : $\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x=\frac{4}{2}=2$

3. $\lim\limits_{x\to-2}x^3+2x^2-x-2=0$ et $\lim\limits_{x\to-2}x^2-4=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$ est une forme indéterminée.

On factorise les deux polynômes par $(x+2)$: $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-1}{x-2}$

Or $\lim\limits_{x\to-2}x^2-1=3$ et $\lim\limits_{x\to-2-}x-2=-4$ donc $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{3x}-3=\sqrt{9}-3=0$ et $\lim\limits_{x\to3}x-3=0$ donc $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$ est une forme indéterminée

On utilise la quantité conjuguée : $\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}=\frac{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}=\frac{3x-9}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}=\frac{3(x-3)}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}=\frac{3}{\sqrt{3x}+3}$

Or $\lim\limits_{x\to3}\frac{3}{\sqrt{3x}+3}=\frac{3}{\sqrt{9}+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3}=\frac{1}{2}$

Exercice 3 :

a) La recherche des asymptotes se fait par la recherche des limites de la fonction

$\lim\limits_{x\to+\infty}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=5$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=5$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=5$.

$\lim\limits_{x\to1-}5=5$; $\lim\limits_{x\to1-}1-x=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1-}\frac{2}{1-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1-}\frac{1}{2x-6}=-\frac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to1-}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1+}5=5$; $\lim\limits_{x\to1+}1-x=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1+}\frac{2}{1-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{2x-6}=-\frac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to1-}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=-\infty$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

$\lim\limits_{x\to3-}5=5$; $\lim\limits_{x\to3-}\frac{2}{1-x}=-1$; $\lim\limits_{x\to3-}2x-6=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to1-}\frac{1}{2x-6}=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1-}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3+}5=5$; $\lim\limits_{x\to3+}\frac{2}{1-x}=-1$; $\lim\limits_{x\to3+}2x-6=0^+$ donc $\lim\limits_{x\to3+}\frac{1}{2x-6}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to3+}5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=+\infty$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x=3$.

b) Le point d'intersection M appartient à la courbe et à la droite d'équation $y=5$.

Ses coordonnées vérifient : $f(x)=5$ soit $5+\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=5\Leftrightarrow\frac{2}{1-x}+\frac{1}{2x-6}=0\;\frac{2(2x-6)+(1-x)}{(1-x)(2x-6)}=0$

$\Leftrightarrow\frac{4x-12+1-x}{(1-x)(2x-6)}=0\Leftrightarrow\frac{3x-11}{(1-x)(2x-6)}=0\Leftrightarrow3x-11=0$ soit $x=\frac{11}{3}$

Donc la courbe coupe l'asymptote en un unique point M de coordonnées $\left(\frac{11}{3};5\right)$