Mercredi 15 janvier 2020

Suites *Nombres complexes*	**Contrôle n°4 – 1h45min** Avec calculatrice	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 : 10 pts

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O}\ ;\ \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d) complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{\frac{i\pi}{3}}$; $b' = be^{\frac{i\pi}{3}}$ et $c' = ce^{\frac{i\pi}{3}}$

a) Montrer que $b' = 8$

b) Calculer le module et un argument du nombre a'

Pour la suite on admet que $\boldsymbol{a'} = -\mathbf{4} + \mathbf{4}\boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}}$ ***et*** $\boldsymbol{c'} = -\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{4}\boldsymbol{i}$

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A'B], [B'C] et [C'A].

Calculer $r\ et\ s$

On admettra que $\boldsymbol{t} = \mathbf{2} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} + \boldsymbol{i}(\mathbf{2} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 2 : 3 pts

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

Affirmation 1 : Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3i$

<u>**Exercice 3**</u> : 7 pts

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n. On rappelle que $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + {b_n}^2}$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (b_n).

Partie A :

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1 puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de (b_n) lorsque n tend vers $+\infty$.