Suites *Nombres complexes*	**Corrigé du contrôle n°4 – 2h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 : Métropole juin 2015

1) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
L'équation (E) admet donc deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-8) + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (E) \text{ est } \{4 + 4i\sqrt{3}, 4 - 4i\sqrt{3}\}.}$$

2) a) $|a| = |4(1 + i\sqrt{3})| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{1+3} = 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$ puis

$$a = 8\left(\frac{4}{8} + i\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

$$\boxed{|a| = 8 \text{ et un argument de } a \text{ est } \frac{\pi}{3}.}$$

b) Par suite, $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{a = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

c) On a déjà $|a| = 8$ et $|b| = 8$. Enfin, $|c| = |8i| = 8|i| = 8$. Donc,

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 8.}$$

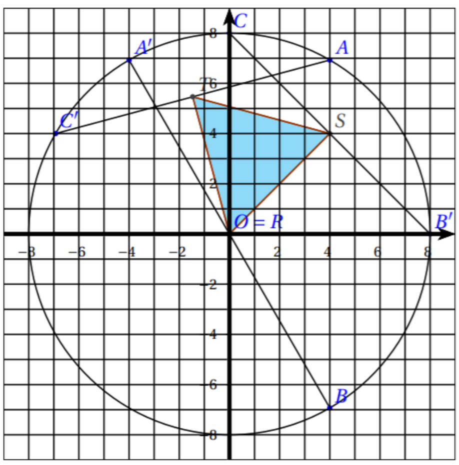
3) a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^0 = 8$.

$$\boxed{b' = 8.}$$

b) $a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\boxed{|a'| = 8 \text{ et un argument de } a' \text{ est } \frac{2\pi}{3}.}$$

4) a) $r = \dfrac{a'+b}{2} = \dfrac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0$. $s = \dfrac{b'+c}{2} = \dfrac{8+8i}{2} = 4+4i$.



b. Il semble que la figure que RST soit un triangle équilatéral.

- $RS = |s-r| = |4+4i| = 4|1+i| = \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $ST = |t-s| = |-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})| = 2|-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})|$
  $= 2\sqrt{(-1-\sqrt{3})^2+(-1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{(1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3)} = 2\sqrt{8}$
  $= \boxed{4\sqrt{2}}$.
- $RT = |t-r| = |2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})|$
  $= 2|1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})| = 2\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{8}$
  $= \boxed{4\sqrt{2}}$.

$RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est **équilatéral**.

Exercice 2 :

Affirmation 1 :

On cherche la forme exponentielle de $-1+i$:

$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Donc $-1+i = \sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}$ et $(-1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{\frac{i3\pi}{4}\times 10} = 32e^{\frac{15\pi}{2}i}$

$$= 32\left(\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{15\pi}{2}\right)\right) = 32\left(\cos\left(\frac{16\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{16\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32\left(\cos\left(8\pi-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(8\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -32i$$

Donc $(-1+i)^{10}$ est un imaginaire pur, l'affirmation est vraie.

Affirmation 2 :

Soit E le point d'affixe 4, F le point d'affixe $-2i$ et M le point d'affixe z.

$|z-4| = |z+2i| \Leftrightarrow EM = FM$

L'ensemble des points M vérifiant $|z-4| = |z+2i|$ est donc la médiatrice du segment [EF] ; c'est donc une droite.

Vérifions si le point A d'affixe $3i$ appartient à cette droite :

Pour $z = z_A = 3i$, $|z-4| = |3i-4| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

Et $|z+2i| = |3i+2i| = |5i| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$

On en déduit que $|z_A-4| = |z+2i| = 5$ donc le point A d'affixe 3i appartient à cette droite.
L'affirmation est alors vraie.

Exercice 3 :

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.
2. $z_1 = \dfrac{z_0+|z_0|}{3} = \dfrac{1+i+\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}i$. On a alors $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$ et $z_{n+1} = \dfrac{a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2+b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2+b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.