Agrégation interne

<u>Oral 1 : 25 avril 2021</u>

Je tire le couplage :
205 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien. Application à l'approximation des fonctions.
235 Exponentielle matricielles : définition, propriétés, applications

Je n'ai préparé aucun des deux sujets. Je feuillette 5 minutes quelques uns de mes livres et quelques autres de la bibliothèque virtuelle. Et puis je me souviens d'un détail. Il se trouve que mon chien s'est couché sur une page du livre d'Isenmann Pecate qui traitait de la surjectivité de l'exponentielle matricielle et qu'un ami agrégé ayant vu la photo postée sur Facebook m'a fait la remarque « c'est un beau développement ». Je m'accroche à cette unique information et à la présence d'algèbre qui me rassure, bien que les rapports de jury précisent qu'il ne faut pas confondre ce sujet avec un sujet d'algèbre. Je choisis donc le second sujet.

Je glane tout ce que je peux dans le Dantzer et je crois dans le Rouvière et bizarrement je ne regarde pas Isenmann Pecate qui m'effraie parce que destiné à l'agrégation externe.

Je trouve une preuve de la surjectivité dans l'un des livres de la bibliothèque en ligne. Je le recopie 3 fois sur mes brouillons en essayant de l'apprendre par cœur et en repérant les enchainements logiques et les articulations de la preuve. Je m'appuie sur ce que je connais de la décomposition de Dunford et j'apprends un petit passage par cœur pour ne pas m'embrouiller dans mes notations. Cela va m'aider mais ne me permet pas beaucoup d'aisance.

Je présente le plan ci-dessous en 13 minutes.

Au moment de l'oral, je repère les dimensions du tableau et je décide de le partager en 6 colonnes. 3 pour le plan et 3 pour le développement.

Je procède au partage en trois colonnes de la moitié de gauche et j'inscris en haut de chaque colonne mes trois titres en précisant à haute voix, à l'intention du jury, que je respecte le plan proposé dans l'énoncé du sujet.

I Définition

Notations : $n \in \mathbb{N}^*$

$\boldsymbol{K}$ un corps

$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\boldsymbol{K}$

Propositions liminaires :

- $(\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}), +, \times, \cdot)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n}$ définie par : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}), \|\cdot\|_{\mathcal{M}_n} = sup_{x \in \boldsymbol{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$ est une algèbre de Banach.
- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est convergente.

Définition :

On appelle exponentielle complexe l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$:

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}) &\to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}) \\ A &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \end{aligned}$$

II Propriétés

Proposition 1

1. $\exp(0_n) = I_n$
2. Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$tels que $AB = BA$, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ $\exp(A)$ est un inversible de $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
4. L'application exp est continue sur $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$.

Proposition 2

Soit f une application de classe C^1définie sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$

On suppose que f et sa dérivée f' commutent, alors :

$$\begin{aligned} \psi : I &\to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K}) \\ t &\mapsto \exp f(t) \end{aligned}$$

Est dérivable sur I avec :

$$\forall t \in I,$$
$$\psi'(t) = f'(t)\exp\big(f(t)\big) = \exp\big(f(t)\big) f'(t)$$

Théorème

L'exponentielle matricielle est surjective de $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})\ sur\ GL_n(\boldsymbol{K})$

Corollaire

$GL_n(\boldsymbol{K})$ est connexe par arcs.

III – Applications

Calculs algébriques

Calculer $\exp(M)$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Résolution d'équations

Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'équation :

$$e^X = I_n$$

Systèmes différentiels

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $t \mapsto \exp(tA)$ est l'unique fonction

$y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} y(0) = I_n \\ \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = Ay(t) \end{cases}$$

Résoudre : $\begin{cases} u' = 5u - 3v \\ v' = 6u - 6v \end{cases}$

Développement

L'exponentielle matricielle réalise une surjection de Mn(K) dans GLn(K). J'expose la preuve ci-dessous en 12 minutes.

Pour toute matrice A de GLn(K), il existe un polynôme Q appartenant à K[X] tel que $e^{Q(A)} = A$

Soit A appartenant à GLn(K), on a la décomposition de Dunford A=D+V avec D diagonalisable, V nilpotente et DV=VD. D et V sont des polynômes en A.

D a les mêmes valeurs propres que A donc D est inversible.

Il existe un polynôme Q1 de K[X] tel que Δ=Q1(D) soit diagonalisable et $e^{Q1(D)} = D$

La matrice D étant polynomiale en A il en est de même de Δ.

On cherche Y tel que X= $\Delta + \mathrm{Y}$ avec Y nilpotente commutant avec Δ telle que $e^X = A = D + V$. On doit avoir $D = e^{\Delta}$ et $V = e^{\Delta}(e^Y - I_n)$.

Comme V et D commutent, V et D^{-1} aussi et $D^{-1}V$ est nilpotente donc et $D^{-1}V+I_n$ est unipotente. Il existe une matrice nilpotente Y telle que $e^Y = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{V} + I_n$. Cette matrice étant polynomiale en $\mathrm{D}^{-1}\mathrm{V}$.

(et j'ai oublié de citer ceci : D'après le théorème de Cayley-Hamilton, D^{-1} est polynomiale en D donc en A).

V est polynomiale en A donc $\mathrm{D}^{-1}\mathrm{V}$ et Y sont polynomiales en A. Par conséquent elles commutent.

Conclusion : Δ et Y commutent.

$$e^{\Delta+\mathrm{Y}} = e^{\Delta}e^Y = D(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{V} + I_n) = D + V = A$$

Avec Δ et Y polynomiales en A. On en déduit la surjectivité de l'exponentielle sur GLn(K).

Remarques de forme du jury :

J'ai utilisé la même lettre n pour la dimension et pour l'indice de sommation.

Je n'ai pas précisé ce qu'était I.

Questions :

Pourquoi D a-t-elle les mêmes valeurs propres que A ?

Je ne sais pas répondre. J'ai baragouiné un truc du genre « les valeurs propres sont toutes non nulles » mais en sachant que cela était nécessaire mais loin d'être suffisant.

Qu'est-ce qu'une algèbre de Banach ?

Je donne la définition.

Dans la seconde proposition liminaire, pourquoi y a-t-il convergence ?

J'explique qu'il y a absolue convergence en utilisant la propriété dans un Banach mais cela ne semble pas suffire.

Démontrer le corollaire de la connexité de GLn(K)

J'explique qu'il est connexe par arcs.

Qu'est-ce qu'un arc ? Qu'est-ce que la connexité par arcs ?

J'explique qu'un arc est l'image d'une fonction continue de [0,1] dans l'espace d'origine l'image de 0 et d'extrémité l'image de 1. La connexité par arc est définie pour tout couple d'éléments A et B de l'espace tels qu'il existe un arc d'origine A et d'extrémité B qui est inclus dans l'espace.

Cela n'est pas une preuve.

Là je ne sais plus. Je cite tout ce que je sais sur la connexité et dont j'arrive à me souvenir : il n'existe pas de partition de l'espace en deux ouverts, il n'y a qu'une seule composante connexe, il n'y a que deux sous-ensembles à la fois ouverts et fermés : l'ensemble vide et l'espace entier…

Et j'oublie de parler de continuité ! (je m'en souviens en écrivant)

Comment résoudre la première application ?

J'explique la diagonalisation. Il m'est demandé de le résoudre sans calculer la diagonale. Je ne sais pas faire. J'évoque les valeurs propres, les sous espaces propres et toute la théorie que j'arrive à mobiliser mais je ne sais pas répondre.

Comment résoudre le système 1 ?

J'explique la théorie mais il faut que j'approfondisse. Là encore je ne sais pas trop.

Comment résoudre le second système ?

J'exhibe les deux vecteurs utiles et la matrice 2x2. Encore une fois le jury me demande de résoudre sans calculer les valeurs propres. Et là je m'embrouille dans les notations et j'ai mis longtemps à écrire une équation dont les dimensions permettaient le produit matriciel. En fin de compte j'y suis arrivée. D'ailleurs le jury s'est embrouillé aussi en confondant les notations du premier système avec le second. Quand j'explique qu'il ne s'agit pas du même exercice le jury me dit que si et que je dois continuer ce qui m'a mise en difficulté.

Mes impressions :

Le jury a été très bienveillant. J'ai été à l'écoute. Mais je n'ai pas vraiment donné satisfaction. Parfois l'un des membres du jury approuvait de la tête mais souvent j'ai lu une certaine réticence face à mes réponses ou une déception quand elles étaient incomplètes.

Remarque de Gilles sur mon plan : c'est propre, correct, honnête. Tout l'important y est.

Note obtenue : 08,8/20

<u>Oral 2 : 26 avril 2021</u>

Je tire le couplage :
315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés

330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.

J'ai déjà préparé et présenté les deux sujets en oral blanc. Le 315 il y a trois ans devant Gilles. J'avais choisi la loi de Sylvester en développement. Mais je n'ai pas su l'argumenter et Gilles m'avait dit que c'était pourri.

La leçon 330 est encore très fraiche dans ma tête : présentée pendant ma prépa de cette année, elle a au plus deux mois. J'ai été corrigée par Renaud Coulangeon qui m'a conseillé sur l'exercice que j'aurais intérêt à présenter si je tombe sur cette leçon. De plus, je suis très à l'aise en géométrie. Je choisis de présenter la seconde leçon.

J'effectue ma préparation en moins de 3 heures (j'ai même pu aller aux toilettes).

La difficulté a été de remplacer deux exercices de mon plan initial par deux exercices plus adaptés au titre de cette leçon. EN effet, l'un était hors sujet et l'autre n'apportait rien de particulier.

Je souhaite insérer un exercice qui utilise un peu d'algèbre linéaire (rotation dans l'espace et groupe orthogonal) mais je renonce. J'ai peur de me faire piéger et je préfère conserver la montgolfière.

J'ai trouvé un joli exercice dans le [CRM : fundamentum de géométrie algébrique] sur la distance entre deux droites gauches (ni sécantes ni parallèles) mais je ne veux prendre aucun risque. Un peu calculatoire, je risque de faire ou dire des bêtises, de ne pas savoir argumenter. Je me le garde sous le coude.

Sous Geogebra, je prépare une illustration pour mon exercice 3 (théorème de Napoléon) et pour mon exercice 6 (formule de Girard)

Je me souviens d'une remarque de Renaud Coulangeon sur ma facilité à dessiner en perspective cavalière et je décide de m'appuyer dessus pour mon exercice 4, qui est aussi mon développement. Je ne prépare donc pas d'illustration Geogebra pour le cube.

<u>Liste des exercices présentés :</u>

<u>1) Le pentagone régulier</u> *[SORTAIS : géométrie du plan et de l'espace (entre autres)]*

Construire à la règle non graduée et au compas, un pentagone régulier inscrit dans un cercle.

<u>2) Le théorème de Napoléon</u> *[KIEFFER : 66 leçons]*

Démontrer : si ABC est un triangle, alors les centres de gravité des triangles équilatéraux tous extérieurs ou tous intérieurs construits sur les côtés de ABC forment un triangle équilatéral.

<u>3) Aire maximale</u> *[in BESTIAIRE de Patrick Lasserre : trouvé sur internet et ressorti de mémoire]*

Montrer que l'aire de tout polygone convexe à n côtés inscrit dans un cercle est maximale si et seulement si le polygone est régulier.

<u>4) Section plane d'un cube</u> *[SORTAIS : géométrie du plan et de l'espace (porte le nom d'Al-Kashi et Thalès)]*

Soit un cube ABCDEFGH d'arête a et soit les points M, N et P tels que

$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Dessiner à la règle non graduée et au compas la section du cube par le plan (MNP) en précisant les longueurs et les angles du polygone obtenu.

5) Altitude d'une montgolfière *[SORTAIS : géométrie du plan et de l'espace]*

Deux observateurs placés en deux points A et B d'un même plan horizontal P veulent évaluer l'altitude HM d'une montgolfière M dont le projeté orthogonal sur le plan P est noté H.

Ces observateurs mesurent au même instant les angles suivants : $\widehat{HAM} = \alpha, \widehat{BAM} = \beta, \widehat{ABM} = \gamma$.

Calculer l'altitude de la montgolfière en fonction de $AB, \alpha, \beta, \gamma$.

6) Libreville, Sumatra et le Pôle Nord *[PERRIN : mathématiques d'école]*

Après avoir redémontré la formule de Girard, montrer que le triangle sphérique formé par Libreville au Gabon (10° est) le centre de Sumatra (110° est) et le Pôle Nord possède trois angles droits.

Je présente ma leçon sans aucune note. Cela dure entre 9 et 10 minutes.

Le tableau est plus petit que celui de l'oral 1. Je peux le découper en 4 colonnes de même taille que les 6 de la veille. Je n'ai besoin que d'une seule colonne pour ma présentation :

J'écris les notions distances et angles au centre de la première colonne et j'entoure les mots. Je vais présenter mes exercices sous forme de carte mentale. Au nord de mon titre, les trois exercices qui concernent le plan. Au sud, les trois exercices qui concernent l'espace. Je réserve 3 emplacements de part et d'autre.

J'explique que je vais inscrire dans ces emplacements les différents outils que mes 6 exercices vont illustrer.

Dans le premier emplacement j'inscris les mots règles et compas. Je me tourne vers le jury et explique. J'ai choisi ce premier exercice qui peut sembler un peu simple car je tenais à l'ancrer dans l'histoire des mathématiques d'une part, en effet il nous fait remonter à Euclide et aux Eléments, mais aussi pour l'ancrer dans le cursus historique de nos apprenants qui doivent manipuler la règle et le compas au cycle 3 mais les documents Eduscol parlent de règle dès le CP et de compas dès le CE1.

Le second exercice fait intervenir les nombres complexes et en particulier le nombre complexe j, racine cubique de l'unité, qui permet de caractériser les triangles équilatéraux. Je montre ma construction Geogebra en faisant évoluer les points ce qui permet d'obtenir successivement les deux constructions évoquées dans l'exercice (triangles tous extérieurs ou triangles tous intérieurs).

Le troisième exercice utilise un théorème d'analyse et la stricte concavité de la fonction sinus (j'ai oublié de dire sur quel intervalle mais cela ne m'a pas été reproché). Je fais un petit schéma en triangulant le polygone convexe et en appelant θ_i les angles au centre obtenus. Je donne la formule de l'aire de chaque triangle et inscrit la sommation de ces aires en expliquant que l'utilisation de l'inégalité de Jensen me permettra de conclure au cas d'égalité uniquement si tous les θ_i sont égaux ce qui caractérise un polygone régulier.

Le quatrième exercice (section plane d'un cube) fait intervenir la géométrie vectorielle dans un espace affine ainsi que des théorèmes illustres : Al Kashi, Thalès, Pythagore.

Le cinquième exercice fait intervenir les relations de trigonométrie.

Le sixième exercice se situe dans le domaine de la géométrie sphérique (j'exhibe de nouveau mon illustration Geogebra). Et je conclus mon exposé sur la devinette illustre qu'évoque cette figure : un campeur part en randonnée 10km plein Sud puis 10km plein Est et 10km plein Nord. Il est deux fois surpris car il retombe sur son campement et en plus un ours est en train de tout saccager. De quelle couleur est l'ours ? J'avance la réponse : l'ours est blanc car on est au Pôle Nord. L'un des membres du jury me fait un grand sourire. Je le regarde et je continue. Il existe une seconde réponse. L'ours est noir et c'est un pingouin. J'explique ma pensée en montrant sur la sphère Geogebra la solution au Sud.

Développement

J'effectue le développement type de l'exercice de Sortais. J'écris une bêtise en inscrivant un signe + au lieu d'un signe – à un endroit de l'exposé.

Questions du jury

J'ai parlé de tracer à la règle et au compas. Comment vais-je m'y prendre en détails ?

J'explique en utilisant l'escargot de Pythagore.

Comment tracer une longueur racine de 5 à la règle et au compas sans utiliser l'escargot de Pythagore ?

Je réfléchis puis trouve le triangle rectangle de dimensions 1, 2, racine de 5.

J'ai utilisé Al-Kashi dans mon exercice. Puis-je le redémontrer ?

J'effectue la démonstration mais il y a un truc qui n'est pas convaincant. Le jury me questionne jusqu'à ce que je comprenne mon erreur : en développant mon carré scalaire, j'ai oublié de remettre les vecteurs de l'angle dans le bon ordre. Je m'exécute et modifie le signe de mon expression dans l'exercice en présentant mes excuses au jury qui me sourit.

Tracez un segment et découpez-le en 7 segments de même longueur à la règle non graduée et au compas.

C'est un exercice que je fais faire à mes 6ème… Facile.

En reprenant le cube que j'ai tracé, quel est le chemin le plus court que peut effectuer une fourmi partant du point A pour rejoindre le point G (grande diagonale) ?

Encore une fois il s'agit d'un exo que je montre aux collégiens en 5ème : on trace tout simplement une ligne droite sur un patron.

L'un des membres du jury me demande si j'ai vraiment balayé tous les outils possibles dans mon choix d'exercices.

Je dis que non. Qu'il manque l'algèbre linéaire, mais qu'il m'aurait fallu pouvoir mettre un 7ème exercice avec la distance minimale séparant 2 droites gauches.

Comment auriez-vous fait ? Quels outils pouvez-vous utiliser ?

Je parle du déterminant, du produit scalaire et cela semble convenir (j'ai un petit doute).

Le jury se concerte et me demande de corriger mon exercice 6.

Je redémontre la formule de Girard comme je l'ai vu faire dans une vidéo Youtube (en plus de la correction de Perrin).

Comment définiriez-vous un angle ?

J'explique que c'est la mesure d'un secteur angulaire.

Mais comment définiriez-vous les angles entre du triangle sphérique.

Ce sont les angles formés par les plans sur un plan orthogonal à chacun d'entre eux.

C'est tout ?

Je ne comprends pas ce qu'on attend de moi. J'hésite.

Je parle de représentant d'une classe d'équivalence, de congruence.

Et finalement à force d'écouter les questions qui me sont posées je comprends : il faut que j'oriente mon espace. Je parle de trièdre direct.

Et comment définir un angle dans un plan ?

Je suis drôlement embêtée. J'ai l'impression d'avoir répondu. Je dis que c'est une question difficile. Le jury qui me questionne sourit et me dit que oui.

Un autre interrogateur me demande si je ne peux pas utiliser un outil qui est au tableau.

Je vois le cosinus et je reprends mon laïus. J'oublie d'orienter le plan ! Le jury 1 me le fait remarquer encore une fois. Je parle de sens trigonométrique.

Il me reste 1 minute me dit on.

Est-ce que je peux parler des transformations du plan qui conservent les angles ?

Je parle des similitudes.

Pourriez-vous en citer ?

Je cite les homothéties, les rotations, les translations.

Le jury 1 fait une petite moue.

Je m'écrie sur le gong : les similitudes directes ! Elle a souri.

Mes impressions :

Le jury a été très bienveillant et agréable. Mais je sentais que j'étais dans mon élément. J'ai regretté de ne pas avoir mis un bel exo d'algèbre linéaire avec des rotations mais très heureuse de l'exo sur la formule de Girard.

Note obtenue : 14,6/20

À tous ceux qui préparent : ne baissez pas les bras. Chaque connaissance acquise est utile et sera une de moins à acquérir l'année suivante.

Après une année de maths sup avortée en cours de route, j'ai fait des études d'ingénieur en électronique et informatique par la voie de l'apprentissage. J'avais des cours de maths mais à un niveau bien moins exigeant, bien moins théorique. Je me suis battue pour le Capes interne que j'ai eu en une unique année (avec prépa à Bordeaux avec M. Saliba, Train, Boyer et Terracher).

Pour l'agrégation interne, il m'a fallu 4 essais pour être admissible et admise aussi par là même. Là encore avec des formateurs de préparation : Sur La Rochelle et Poitiers : mon « comme un frère » Gilles Bailly-Maitre, ainsi que Mme Choquet, M. Le Floch, Geoffriau, Fraysseix, Barkatou, Broussous, Bozio. Sur Bordeaux : Mme Chabanol, M. Coulangeon, Deville, Furter, Brignon, Jehanne, Richou.

Comme promis, tout ceci est pour toi, Papi. *Scientiae radices amarae sunt. Fructus dulces.*