Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
2021

Rapport du
49ème Rallye
Mathématique d'Alsace

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 49ème fois en 2021. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Elle a réuni environ 680 participants dont 34 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, quinze binômes et un monôme sont primés : trois premiers prix, six deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

En Terminale, vingt-et-un binômes et un monôme ont été sélectionnés : six premiers prix, sept deuxièmes prix et neuf troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La traditionnelle cérémonie de remise des prix n'a pas pu avoir lieu cette année.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 49ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Région Grand Est
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Haguenau
- ◊ La Ville de Mulhouse
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de Saint-Louis
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société NUMWORKS

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2021

Premier prix

- ✓ CAUSSE Gaspard et DAI Charles
  Professeur : M. Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ DAOUD Nassim et SUTEU Luca
  Professeurs : Mme Samama et M. Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ GALLONE Thibaut
  Professeur : M. Seckinger, Lycée Marie Curie, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ HOOG Cédric et LEDDA Romain
  Professeur : Mme Higelin, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ MOLIMARD Solène et RABAGA-HAGAMANJAKA Niels
  Professeur : M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ JAILLET Camille et LEY Louise
  Professeur : Mme Schnabel, Institution Sainte Jeanne d'Arc, Mulhouse

- ✓ CHOULET Clément et RIOU Gabin
  Professeurs : Mme Antoni et M. Herb, Lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé

- ✓ KUHM Agathe et LAMULLE Emma
  Professeurs : Mme Fleurotte et M.Killian, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller

- ✓ MASSON Kieran et THOMANN Eliott
  Professeur : M. Capot, Lycée Henri Meck, Molsheim

Troisième prix

- ✓ CHATELET Chloé et JENNY Anna
  Professeurs : M. Hartmann et Mme Bannwarth, Lycée Scheurer Kestner, Thann

- ✓ JORDAN Yves et WERLE Martin
  Professeurs : Mme Stupfler et M. Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ POTOCNIK Alexandre et RIVERA Gauthier
  Professeur : Mme Scheurer, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ LALLEMAND Raphaëlle et RODRIGUEZ FERNANDEZ Naroa
  Professeur : Mme Cloarec, Ecole Européenne, Luxembourg

- ✓ DIGUET Franck et SHALA Fane
  Professeur : M. Godey, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ LEBLANC Emma et SAVARY de BEAUREGARD Calixte
  Professeurs : M. Sutter et Mme Collette-Clerbaut, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ BACHSCHMIDT Martin et HUN Amandine
  Professeur : Mme Reich, Lycée Blaise Pascal, Colmar

Palmarès des Terminales 2021

Premier prix

- ✓ BARTOLI Paul et DUCLAUX Colomban
  Professeur : M. Gosset, Lycée Français, Zurich
- ✓ GEROUILLE Guilhem et QUAN Leya
  Professeurs : Mme Walter et Mme Schmitt, Collège Episcopal, Zillisheim
- ✓ JACQUET Pierrick et KLEIN Florian
  Professeur : Mme Vonflie, Lycée Don Bosco, Landser
- ✓ SCHMITT Martin et SCHMITTBUHL Pierre
  Professeurs : Mme Weber et M. Sonntag, Lycée Henri Meck, Molsheim
- ✓ GREFFE Florent et GRIMENT Eliot
  Professeur : M. Lambert, Lycée Camille Sée, Colmar
- ✓ GAMB Jeremy et WEBER Théo
  Professeurs : M. Potin et M. Tahar, Lycée Pasteur, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ GUILLORET Jules
  Professeur : Mme Morand, Lycée Le Corbusier, Illkirch-Graffenstaden
- ✓ HOANG Maxime et WALPO Samuel
  Professeur : Mme Wassong, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg
- ✓ BINDER Aurore et GABY Alice
  Professeurs : M. Herzog et M. Schildknecht, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis
- ✓ GABUS Malo et GERBER Adrien
  Professeurs : Mme Miolin et Mme Munch, Lycée Jean-Jacques Henner, Altkirch
- ✓ HEUPEL Léo Valentin et ZILLIOX Théo Marcel
  Professeurs : M. Abba et Mme Bruni, Lycée Kléber, Strasbourg
- ✓ DEMIMUID Arthur et ZAYTSEV Mikhail
  Professeur : Mme Collette-Clerbaut, Lycée Vauban, Luxembourg
- ✓ GILLES David et GREFFE Geoffroy
  Professeurs : Mme Klein et Mme Wendel, Lycée Stanislas, Wissembourg

Troisième prix

- ✓ ASTIER DASEN Axel et CARRAYROU Noé
  Professeur : M. Rathana, Lycée Kléber, Strasbourg
- ✓ CHIKHAOUI Kenji et HUY Estelle
  Professeur : M. Weil, Lycée International, Strasbourg
- ✓ MULLER Robin et ROSART Vittore
  Professeur : M. Rathana, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ GUERRIER Laure et KUBLER Alice
  Professeurs : Mme Collet et M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ DEMUTH Léo et FERKATADJI Jean
  Professeur : Mme Schnabel, Institution Sainte Jeanne d'Arc, Mulhouse

- ✓ FORESTI Clara et TANNER Liam
  Professeur : M. Rongemaille, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ AUROY Samuel et BECKER Simon
  Professeurs : M. Lambert et M. Didier, Lycée Camille Sée, Colmar

- ✓ GACOUGNOLLE Titouan et WEISSE Romain
  Professeurs : M. Lambert et M. Didier, Lycée Camille Sée, Colmar

- ✓ BOCKHOLT Théo et DIENER Loïck
  Professeurs : Mme Zerr et M. Arnold, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2021
49ème édition

PREMIERES
Mercredi 10 mars 2021

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

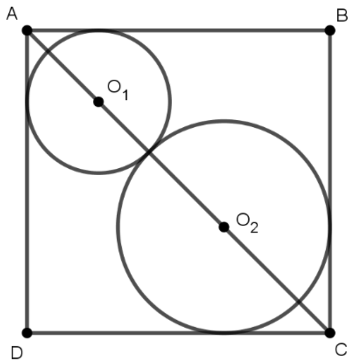
Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :

Un nombre palindrome est un nombre égal au nombre que l'on obtient en le lisant de droite à gauche ; par exemple : 0, 7, 33, 121, 1001, sont des nombres palindromes.
On les range par ordre croissant à partir de zéro : $0, 1, 2, \ldots, 11, 22, \ldots, 101, \ldots$
Quel est le $2021^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?

Exercice 2 :

ABCD est un carré de côté 1, les cercles de centre O_1 et O_2 sont tangents entre eux ainsi qu'à deux côtés du carré comme sur la figure ci-dessous :



On note S la somme des aires des deux disques.
Quelle est la valeur minimale de S ? Quelle est la valeur maximale de S ?

Exercice 3 :

Alice et Bob veulent paver plusieurs zones de leur terrasse. Ils ont acheté pour cela des dalles carrées (dont le côté sera l'unité pour la suite) qu'ils appellent « monominos » et des dalles de 3 unités sur 1 qu'ils appellent « triminos ».

La première zone à paver est un rectangle de 3 unités de largeur sur un nombre entier N d'unités de longueur. Ils veulent recouvrir cette zone exclusivement avec des triminos. Ils s'aperçoivent qu'il n'y a qu'une façon de le faire si $N = 1$ ou $N = 2$, deux façons si $N = 3$, trois façons si $N = 4$. Ils finissent par choisir une longueur de 13 unités.
De combien de façons peuvent-ils paver un rectangle de 3 unités sur 13 avec des triminos ?

La deuxième zone est un rectangle de 2 unités de largeur sur 13 unités de longueur à paver avec des monominos et des triminos.
De combien de façons peuvent-ils paver cette deuxième zone ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2021
49ème édition

TERMINALES
Mercredi 31 mars 2021

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Le nombre n est un entier naturel à cinq chiffres tel que la somme des chiffres de n et la somme des chiffres de $n+1$ soient toutes deux divisibles par 17.
Quel est le plus petit nombre n qui convient ? Combien y a-t-il de tels nombres n ?

Exercice 2 :
Un parc a la forme d'un hexagone régulier. Chaque côté de l'hexagone mesure 2 km. Alice marche le long du périmètre du parc et parcourt 5 km.
À combien de kilomètres (en ligne droite) est-elle de son point de départ ?

Exercice 3 :
Aymeric et Basile jouent au jeu suivant : Aymeric lance une pièce de monnaie, s'il obtient *Face* alors il a perdu. S'il obtient *Pile*, alors c'est au tour de Basile de lancer la pièce. S'il obtient *Face* alors il a perdu, s'il obtient *Pile*, alors c'est au tour d'Aymeric de lancer la pièce. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux joueurs obtiennent *Face* et soit donc déclaré perdant.
Quelle est la probabilité qu'Aymeric gagne la partie ?

Carl se joint à eux. Ils jouent au jeu suivant à tour de rôle : d'abord Aymeric, ensuite Basile, et enfin Carl. Après Carl, Aymeric recommence, et ainsi de suite.
À son tour, chaque joueur désigne un autre joueur encore en jeu pour lancer une pièce de monnaie. Si la personne désignée obtient *Face*, alors elle est immédiatement éliminée. Si elle obtient *Pile*, alors elle peut continuer le jeu. La dernière personne en jeu remporte la partie.
Aymeric et Basile décident de s'allier contre Carl. Ils le désignent donc à chaque fois pour lancer la pièce de monnaie, tant qu'il est présent sur le jeu. Carl, quant à lui, désigne toujours Basile s'il n'est pas éliminé.
Quelle est la probabilité que Carl gagne la partie ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2021

Cette année, 340 binômes (il y avait aussi quelques monômes) représentant environ 300 élèves de premières et 380 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est inférieure à celle des éditions précédentes, notamment en classe de première. Cette année, nous avons modifié le calendrier des épreuves du rallye à cause des dates de passage des épreuves de spécialité du bac pour les terminales (et ce afin de ne pas surcharger le calendrier sur ce niveau) : l'épreuve des premières a donc eu lieu avant celle des terminales (nous sommes conscients que cela fait tôt quant à la progression du programme des premières).

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.
Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Lorsque le sujet comporte un exercice de géométrie, il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures sur une feuille annexe (proprement, à la règle et au compas et non à main levée), afin que les correcteurs puissent l'avoir sous les yeux lors de la lecture de l'ensemble de l'exercice.

En première, les premiers prix ont très bien résolu les trois exercices ou deux exercices et parfois donné des éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien traité un exercice et ont résolu presque complètement un deuxième exercice ou donné plusieurs éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et donné quelques éléments dans l'un au moins des deux autres exercices.

En terminale, les premiers prix ont donné une solution exacte à deux exercices et ont très bien avancé dans le troisième ou donné des éléments.
Les deuxièmes prix ont tous très bien résolu un exercice et ont donné beaucoup d'éléments dans les deux autres ou presque résolu un deuxième exercice.
Les troisièmes prix ont soit très bien résolu un exercice et donné des éléments dans un deuxième exercice soit bien avancé dans les trois exercices.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il s'agissait de trouver le 2021ème nombre palindrome. Le deuxième exercice portait sur une figure géométrique comprenant un carré et deux cercles tangents : il fallait optimiser la somme de deux aires. Dans le troisième exercice, on exposait une manière de paver une terrasse et l'on demandait le nombre de pavages possibles pour deux zones de formes différentes. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Cet exercice a beaucoup plu aux élèves. Il est très souvent bien fait et bien expliqué en général. Les élèves ont correctement dénombré les palindromes en fonction de leur nombre de chiffres.

Exercice 2 : Un grand nombre d'élèves ont vu quelles étaient les positions des deux cercles qui permettaient d'obtenir la somme des aires minimale ou maximale, mais très rares sont ceux qui ont cherché à le démontrer. Partant de là, beaucoup mesurent ensuite sur une figure, quand d'autres donnent des valeurs approchées quasiment dès le début de leurs calculs. Certaines copies arrivent au bout de l'exercice, tous les calculs sont justes et bien justifiés, mais les élèves donnent une valeur approchée de S (sans donner la valeur exacte) lors de la dernière étape.

Exercice 3 : Cet exercice semble aussi avoir bien plu aux élèves, les nombreux dessins faits dans leurs copies témoignent du temps qu'ils y ont passé. Certains dénombrent directement les différentes possibilités en distinguant les différents cas possibles, quand d'autres trouvent une relation de récurrence permettant d'obtenir le résultat de façon rapide. Il est évident que cette relation de récurrence doit être justifiée et pas seulement constatée ! Plusieurs copies ont donné des explications très claires et rigoureuses.

Compte–rendu de l’épreuve de Terminale

L’épreuve du Rallye Mathématique d’Alsace de Terminale comprend, comme à l’habitude, trois exercices. Dans le premier exercice, on demandait de trouver des nombres entiers respectant des contraintes sur la somme de leurs chiffres. Dans le deuxième exercice, il s’agissait de trouver une distance dans un hexagone. Le troisième exercice était un exercice de probabilités.

Les trois exercices ont été bien compris et bien abordés. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : La réponse à la première question a très souvent été trouvée. Rares sont les candidats qui donnent une démonstration complète du résultat (ils s’arrêtent à l’annonce de la valeur 9 pour les deux derniers chiffres, sans traiter les cas des chiffres des centaines et milliers). Dans la deuxième question, beaucoup de candidats se contentent d’annoncer le nombre de solutions, sans rédiger de détails quant à leur dénombrement : il est souhaitable de présenter la façon de compter les solutions. Pour ceux qui rédigent, les méthodes proposées sont plus ou moins efficaces (d’où les réponses assez variables à cette question).

Exercice 2 : Peu d’élèves ont étudié tous les cas possibles. Beaucoup de candidats ont pris pour point de départ un sommet de l’hexagone, ce qui n’était pas une hypothèse de l’énoncé. Parmi les candidats qui trouvent une expression de la distance ou les deux expressions différentes de la distance selon les cas, peu étudient les valeurs de cette distance (pas d’étude de fonction, peut-être que la racine carrée les rebute). Et ceux qui donnent les valeurs extrêmes donnent des valeurs approchées, sans écrire les valeurs exactes. Il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures de géométrie sur une feuille annexe, afin que les correcteurs puissent l’avoir sous les yeux lors de la lecture de l’ensemble de l’exercice.

Exercice 3 : Cet exercice a été bien compris dans l’ensemble. On peut regretter que les limites soient très souvent obtenues à l’aide de la calculatrice au lieu d’une démonstration rigoureuse.

Copies des Premières

KUHM Agathe et LAMULLE Emma
Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller
Exercice n°1

Nous avons cherché à compter le nombre de nombres palindromes à 1 chiffre, puis de nombres palindromes à 2 chiffres, puis de nombres palindromes à 3 chiffres, puis à 4 chiffres ... jusqu'à arriver au 2021ème nombre palindrome.
Pour les nombres palindromes à 1 chiffre :
il y en a 10 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Pour les nombres palindromes à 2 chiffres :
il y en a 9 : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 et 99
Pour les nombres palindromes à 3 chiffres :
Ce sont tous les nombres à 3 chiffres dont le chiffre des centaines et le même que celui des unités.
Ils ont donc une forme comme cela , où chaque disque est un chiffre (le premier et le dernier disque sont de la même couleur, pour que le chiffre des unités et des centaines soient identiques et que ce soit un nombre palindrome). Le disque rouge peut prendre toutes les valeurs de 1 à 9 (il ne peut pas prendre la valeur 0 car sinon ce serait un nombre à 2 chiffre puisque le chiffre des centaines serait nul). Le disque vert peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9. Le disque rouge peut donc prendre 9 valeurs différentes et le disque vert peut prendre 10 valeurs différentes. Il existe donc un total de $9 \times 10 = 90$ nombres palindromes à 3 chiffres.

Pour les nombres palidromes à 4 chiffres :
Ce sont tous les nombres à 4 chiffres dont le chiffre des unités est le même que celui des milliers, et dont le chiffre des centaines est le même que celui des dizaines. Ils ont donc une forme comme cela . Le disque rouge peut à nouveau prendre toutes les valeurs de 1 à 9 et le disque vert peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9. Le disque rouge peut prendre 9 valeurs différentes et le disque vert peut prendre 10 valeurs différentes. Il y a donc un total de 9x 10 = 90 nombres palindromes à 4 chiffres.

Pour les nombres palindromes à 5 chiffres:
Ce sont tous les nombres à 5 chiffres dont le chiffre des unités et des dizaines de milliers sont identiques, et dont le chiffre des milliers et des dizaines sont identiques. Ils ont donc une forme comme cela . Le disque rouge peut prendre toutes les valeurs de 1 à 9, donc 9 valeurs différentes, le disque vert peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9 donc 10 valeurs différentes, et le disque noir peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9, donc 10 valeurs différentes. Il existe donc un total de 9 x 10 x 10 = 900 nombres palindromes à 5 chiffres.

Pour les nombres palindromes à 6 chiffres :
Ils ont une forme comme cela . Le disque rouge peut prendre toutes valeurs de 1 à 9, donc 9 valeurs différentes, le disque vert peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9, donc 10 valeurs différentes, et le disque noir peut prendre toutes les valeurs de 0 à 9, donc 10 valeurs différentes. Il y a donc un total de 9 x 10 x 10 = 900 nombres palindromes à 6 chiffres.

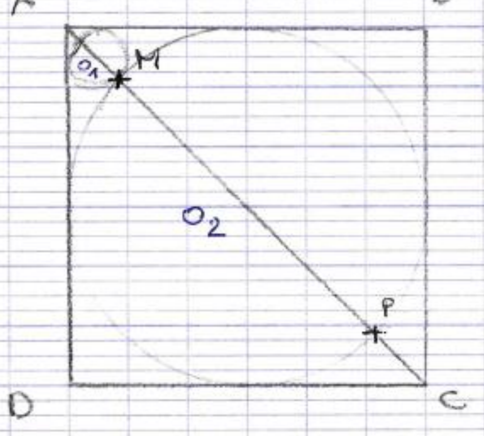
Nous en sommes donc à 10 + 9 + 90 + 90 + 900 + 900 = 1999 nombres palindromes (ce qui est très proche de 2021).
Nous avons donc ensuite listé les premiers nombres palidromes à 7 chiffres :
1000001 ; 1001001 ; 1002001 ; 1003001 ; 1004001 ; 1005001 ; 1006001 ; 1007001 ; 1008001 ; 1009001 ; 1010101 ; 1011101 ; 1012101 ; 1013101 ; 1014101 ; 1015101 ; 1016101, 1017101, 1018101 ; 1019101 ; 1020201 ; $\boxed{1021201}$

1021201 est le 2021 ème nombre palindrome.

CAUSSE Gaspard et DAI Charles
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°2

2) Tout d'abord, définissons quelques notations.
Soit M, le point de contact entre les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et r_1, r_2 respectivement leurs rayons.
On définit x, la longueur AM.
Par construction, les centres des cercles étant sur la diagonale [AC] de ABCD, on a $M \in [AC]$.
D'après Pythagore, $AC = \sqrt{AB^2+BC^2}$
$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Soit f une fonction qui associe à la longueur x la somme des aires des deux disques.
Parlons d'abord du domaine de définition de cette fonction. Elle est définie si le point M est défini autrement dit si les deux cercles sont définis suivant les contraintes de construction. Les bornes de ce domaine sont les valeurs pour lesquelles un des deux cercles a atteint sa taille maximale, soit un diamètre de 1 et un rayon de 0,5. Ainsi, lorsque $\mathcal{C}_2$ a un rayon de 0,5, on a $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (voir fig1)



Soit P le deuxième point d'intersection de (AC) et O_2

On a $AM = PC$ par symétrie axiale d'axe (BD)

donc $AM + PC = AC - PM$ puisque ABCD est un carré

$\Leftrightarrow 2AM = \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow AM = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

D'autre part, la borne supérieure de x est sa valeur lorsque $\mathcal{C}_1$ a un rayon maximal. Soit la même situation que sur la figure 1, transformée par une symétrie d'axe (BD). on a ainsi $AP = AC - PC$

et selon les calculs précédents

$$AP = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

Donc $\mathcal{D}_f = \left[\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \right]$

$$f(x) = \mathcal{A}(\mathcal{C}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{C}_2)$$
$$= \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$
$$= \pi \left(r_1^2 + r_2^2 \right)$$

Soit O_1' le projeté orthogonal de O_1 sur AD.

Comme $\widehat{O_1'AO_1} = 45°$, le triangle est rectangle isocèle en A et d'après Pythagore, $(O_1'O_1)^2 + (O_1'A)^2 = (AO_1)^2$

comme $(O_1'O_1) = (O_1'A)$ $\Leftrightarrow r_1^2 + r_1^2 = AO_1^2$

$\Leftrightarrow AO_1^2 = 2r_1^2$

$\Leftrightarrow AO_1 = \sqrt{2}\, r_1$

Donc comme $x = \sqrt{2}\, r_1 + r_1$

$\Leftrightarrow r_1 = \dfrac{x}{\sqrt{2}+1}$

D'autre part de la même manière

$CM = \sqrt{2}\, r_2 + r_2$ $(= CO_2 + O_2M)$

et $CM = \sqrt{2} - x$

donc $(\sqrt{2}+1) r_2 = \sqrt{2} - x$

$\Leftrightarrow r_2 = \dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+1}$

donc $f(x) = \pi \left(\frac{x^2 + (\sqrt{2}-x)^2}{(1+\sqrt{2})^2} \right)$

$$= \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}} \left(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \right)$$

$$= \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}} x^2 - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3+2\sqrt{2}} x + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$$

On a donc $f'(x) = \frac{4\pi}{3+2\sqrt{2}} x - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3+2\sqrt{2}}$

on a $f'(x) > 0 \iff \frac{4\pi x}{3+2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3+2\sqrt{2}} > 0$

$\iff x > \frac{2\sqrt{2}\cancel{\pi}}{\cancel{3+2\sqrt{2}}} \times \frac{\cancel{3+2\sqrt{2}}}{4\cancel{\pi}}$

$\iff x > \frac{2\sqrt{2}}{4}$ ou $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $f(x)$ est croissante sur $x \in \left] \frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right]$

et décroissante sur $x \in \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$

le minimum de la fonction est donc $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et les maximums sont les bornes.

Graphiquement cela signifie que lorsque le point M se situe au milieu de [AC], la somme S des aires est minimale. Cette somme est maximum lorsque $AM = \left\{ \frac{\sqrt{2}-1}{2} ; \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right\}$.

$$f(x) = S_{min} \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff S_{min} = \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}} - \frac{4\pi}{6+4\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$$

l'aire minimale des deux disques est donc de $\boxed{= \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}}} \simeq 0,53901$ u.a.

Enfin $f(x) = S_{max} \iff x = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ $\left(\text{ou } \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$

$$\iff S_{max} = \frac{2\pi(\sqrt{2}+1)^2}{(3+2\sqrt{2})4} - \frac{2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}+1)}{2(3+2\sqrt{2})} + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6\pi + 4\sqrt{2}\pi}{12+8\sqrt{2}} - \frac{4\pi + 2\sqrt{2}\pi}{6+4\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\pi + 2\sqrt{2}\pi - 4\pi - 2\sqrt{2}\pi + 4\pi}{6+4\sqrt{2}}$$

l'aire maximale des deux cercles est donc de $= \boxed{\frac{3\pi}{6+4\sqrt{2}}} \simeq 0,80852$ u.a.

GALLONE Thibaut
Lycée Marie Curie, Strasbourg
Exercice n°3

On peut disposer les triminos de deux façons :

verticalement ou horizontallement par paquet de trois

Dans une zone de 3 unitée sur 13 on peut donc mettre jusqu'à quatre paquet horizontaux

0 paquet horizontal :

il n'y à qu'une possibilité car tout les triminos sont à la vertical.

1 paquet horizontal

il y à donc 1 paquet horizontal plus 10 triminos verticaux.
on peut placer de 0 à 10 triminos devant le paquet horizontal
(le reste sera derière)
on à donc 11 possibilités

2 paquets horizontaux :

on considère que le premier paquet reste collé à un des deux cotés. Il reste 7 triminos verticaux, on a donc 8 possibilités.
en les placant avant ou apres le deuxième paquet horizontal.
Si on en met un devant le premier paquet et que l'on refait l'operation précédente, il reste 6 triminos donc 7 possibilités

On continue l'opération en augmentant le nombre de triminos devant le 1er paquet. (2 triminos devant = 5 triminos libres, 3 devant = 4 libres ...)
Sachant que nb possibilités = nb libres + 1 ;
Au final on à donc 8+7+6+5+4+3+2+1 = 36 possibilités

3 paquets horizontaux :

On bloque le 1er paquet sur un cotés et on utilise la même procedure avec les 2 autres restant mais avec 4 triminos libres.
on à donc : 5+4+3+2+1 = 15 possibilités

On place un des triminos devant le tout premier :
4+3+2+1 = 10 possibilités
etc...
On à donc : (5+4+3+2+1) + (4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1
= 35 possibilités.

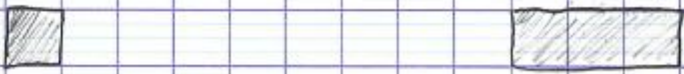
4 paquets horizontaux :

il reste 1 triminos vertical qu'on peut placer :
avant le 1er paquet
entre le 1er et le 2ème paquet
entre le 2ème et le 3ème paquet
entre le 3ème et le 4ème paquet
après le 4ème paquet
il y a 5 possibilités.

Au total, pour une zone de 3 unités on à donc
1 + 11 + 36 + 35 + 5 = 88 possibilités de pavages.

Pour une zone de 2 unités sur 13 unitées on à deux dispositions possible :

un monomino un triminos couché



Si on utilise une zone 1×13 on à autant de possibilité que pour une zone 3×13 uniquement en triminos car on utilise soit 1, soit 3 unitées de longueur. Il y a donc 88 possibilitées

Pour une zone 2×13 on multiplie les possibilités pour une ligne par le nombre de possibilitées de la seconde ligne étant donné qu'on ne peut poser aucun pavé qui se situe sur les deux ligne à la fois. On a donc $88 \times 88 = 7744$ possibilitées.

Autre solution pour la 1ère question :

CAUSSE Gaspard et DAI Charles
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Dans le rectangle de largeur 3, lorsqu'on place un trimino horizontalement sur la 1ère ligne, on est obligé d'en placer 2 sur les lignes de dessous. Quand on place un trimino verticalement, il occupe une case de chaque ligne dans la colonne

Ainsi, on s'aperçoit que les 3 lignes sont exactement les mêmes : il suffit alors d'étudier une seule ligne, pavée avec des monominos (correspondant aux triminos verticaux) et des triminos (correspondant à 3 triminos horizontaux superposés).

Soit (u_n) la suite telle que u_n est le nombre de façons de paver une ligne de n cases avec des monominos et des triminos.

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 2$.

Pour $n > 3$, la dernière dalle est soit un trimino soit un monomino.
Si c'est un trimino, il y a u_{n-3} façons de paver les $n-3$ cases restantes.
Si c'est un monomino, il y a u_{n-1} façons de paver les $n-1$ cases restantes.

On a donc $u_n = u_{n-1} + u_{n-3}$

On veut calculer u_{13} :

$u_1 = 1$

$u_2 = 1$

$u_3 = 2$

$u_4 = u_3 + u_1 = 2 + 1 = 3$

$u_5 = u_4 + u_2 = 3 + 1 = 4$

$u_6 = u_5 + u_3 = 4 + 2 = 6$

$u_7 = u_6 + u_4 = 6 + 3 = 9$

$u_8 = u_7 + u_5 = 9 + 4 = 13$

$u_9 = u_8 + u_6 = 13 + 6 = 19$

$u_{10} = u_9 + u_7 = 19 + 9 = 28$

$u_{11} = u_{10} + u_8 = 28 + 13 = 41$

$u_{12} = u_{11} + u_9 = 41 + 19 = 60$

$u_{13} = u_{12} + u_{10} = 60 + 28 = 88$

Il y a donc 88 façons de paver un rectangle de 3 unités sur 13 avec des triminos.

Copies des Terminales

SCHMITT Martin et SCHMITTBUHL Pierre
Lycée Henri Meck, Molsheim
Exercice n°1

On pose $a, b, c, d, e \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

et $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ de telle sorte que n s'écrivent

$\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$.

On remarque que pour que n soit à 5 chiffres, $a \neq 0$ car sinon $n \leq 9999$.

D'après l'énoncé, il faut que la somme des chiffres de n et la somme des chiffres de $n+1$ soient divisibles par 17.

Donc pour le cas de n, il faut que $a+b+c+d+e = 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\Leftrightarrow a+b+c+d+e \equiv 0\ [17]$

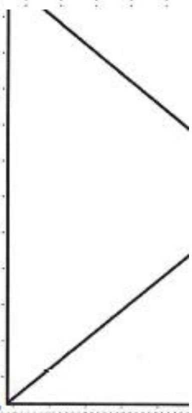
Pour $n+1$, observons les différents cas possibles.

* si $e \neq 9$: Les 4 premiers chiffres de $n+1$ seront les mêmes que ceux de n et le dernier vaudra $e+1$. Leur somme sera donc de $a+b+c+d+e+1$ et donc :

$$a+b+c+d+e \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow a+b+c+d+e+1 \equiv 1\ [17]$$

donc la somme des chiffres de $n+1$ n'est pas divisible par 17 si celle des chiffres de n est divisible par 17.

donc $\boxed{e = 9}$.



* si $e = 9$ et $d \neq 9$:

Le dernier chiffre de $n+1$ est ~~de~~ 0 et l'avant dernier chiffre augmente de 1 car le dernier chiffre de n est $e = 9$.

d, le 4ᵉ chiffre de n étant différent de 9, le 4ᵉ de $n+1$ sera de $d+1$.

La somme des chiffres de $n+1$ sera donc de $a+b+c+(d+1)+0$.

Or $a+b+c+d+e \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow a+b+c+d+9 \equiv 0\ [17]$

$\Leftrightarrow a+b+c+d+1 \equiv -8\ [17] \Leftrightarrow a+b+c+d+1 \equiv 9\ [17]$

donc si la somme des chiffres de n est divisible par 17, alors celle des chiffres de $n+1$ ne l'est pas. Donc : $\boxed{e = 9 \text{ et } d = 9}$

* si $e=9$ et $d=9$ et $c\neq 9$.

Le 4e et 5e chiffre de $n+1$ seront 0 et le 3e sera $c+1$ et les 1er et 2e seront a et b.

La somme des chiffres de $n+1$ sera donc de $a+b+(c+1)+0+0$
$=a+b+c+1$

Or $a+b+c+d+e\equiv 0[17] \Leftrightarrow a+b+c+9+9\equiv 0[17]$

$\Leftrightarrow a+b+c+1\equiv -17[17] \Leftrightarrow a+b+c+1\equiv 0[17]$

Donc si la somme des chiffres de n est divisible par 17, alors celle des chiffres de $n+1$ l'est aussi. Donc $e=9$; $d=9$; $c\neq 9$ fonctionne

* si $e=9$ et $d=9$ et $c=9$ et $b\neq 9$:

Les 3e, 4e et 5e chiffres de $n+1$ seront 0 et le 2e sera $b+1$ et le 1er a.

La somme des chiffres de $n+1$ sera donc de $a+(b+1)+0+0+0=a+b+1$.

Or $a+b+c+d+e\equiv 0[17] \Leftrightarrow a+b+8+9+9\equiv 0[17]$

$\Leftrightarrow a+b+1\equiv -26[17] \Leftrightarrow a+b+1\equiv 8[17]$

Donc si ~~la~~ somme des chiffres de n est divisible par 17 alors celle des chiffres de $n+1$ ne l'est pas non pluss.

Donc $e=9$; $d=9$; $c=9$; $b\neq 9$ ne fonctionne pas.

* $e=9$ et $d=9$ et $c=9$ et $b=9$ et $a\neq 9$

Les 5e, 4e, 3e, 2e chiffres de $n+1$ seront 0 et le premier sera $a+1$.

La somme des chiffres de $n+1$ sera donc $a+1$.

Or $a+b+c+d+e\equiv 0[17] \Leftrightarrow a+9+9+9+9\equiv 0[17]$

$\Leftrightarrow a+1\equiv -35[17] \Leftrightarrow a+1\equiv 16[17]$

Donc si la somme des chiffres de n est divisible par 17 alors celle des chiffres de $n+1$ ne l'est pas. Donc $e=9$; $d=9$; $c=9$; $b=9$; $a\neq 9$ ne fonctionne pas.

* $e=9$ et $d=9$ et $c=9$ et $b=9$ et $a=9$:

La somme des chiffres de n est $9+9+9+9+9=45\equiv 11[17]$

donc cela ne fonctionne pas.

On a donc nécessairement $e = 9$; $d = 9$; $c \neq 9$ et alors si la somme des chiffres de n est divisible par 17, celle des chiffres de $n+1$ l'est aussi.

Si $a+b+c+d+e \equiv 0\ [17] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+b+c+9+9 \equiv 0\,[17] \Leftrightarrow a+b+c+1 \equiv -17\,[17] \Leftrightarrow a+b+c+1 \equiv 0\,[17]$

$\Leftrightarrow a+b+c+1 = 17k, k \in \mathbb{N}$. Or : $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$; $0 \leq c \leq 8$

donc $1+1 \leq a+b+c+1 \leq 9+9+8+1 \Leftrightarrow 2 \leq a+b+c+1 \leq 27$

$\Leftrightarrow 2 \leq 17k \leq 27$ donc $k = 1$ car $k \in \mathbb{N}$.

On a alors $a+b+c+1 = 17 \Leftrightarrow a+b+c = 16$.

Etudions chaque cas de a avec $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$; $0 \leq c \leq 8$:

* $a = 1$: $a+b+c = 16 \Leftrightarrow 1+b+c = 16 \Leftrightarrow b+c = 15$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(7;8)$, $(8;7)$, $(9;6)$.

Il y en a 3.

* $a = 2$: $a+b+c = 16 \Leftrightarrow 2+b+c = 16 \Leftrightarrow b+c = 14$.

Les couples possibles $(b;c)$ sont : $(6;8)$; $(7;7)$; $(8;6)$; $(9;5)$.

Il y en a 4

* $a = 3$: $a+b+c = 16 \Leftrightarrow 3+b+c = 16 \Leftrightarrow b+c = 13$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(5;8)$; $(6;7)$; $(7;6)$; $(8;5)$; $(9;5)$

Il y en a 5.

* $a = 4$: $a+b+c = 16 \Leftrightarrow 4+b+c = 16 \Leftrightarrow b+c = 12$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(4;8)$; $(5;7)$; $(6;6)$; $(7;5)$; $(8;4)$; $(9;3)$

Il y en a 6.

* $a = 5$: $a+b+c = 16 \Leftrightarrow 5+b+c = 16 \Leftrightarrow b+c = 11$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(3;8)$; $(4;7)$; $(5;6)$; $(6;5)$; $(7;4)$; $(8;3)$; $(9;2)$

Il y en a 7.

N°

ne rien écrire dans

* $a=6$: $a+b+c=16 \Leftrightarrow 6+b+c=16 \Leftrightarrow b+c=10$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(2;8)$; $(3;7)$; $(4;6)$; $(5;5)$; $(6;4)$; $(7;3)$ $(8;2)$; $(9;1)$

Il y en a 8.

* $a=7$: $a+b+c=16 \Leftrightarrow 7+b+c=16 \Leftrightarrow b+c=9$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(1;8)$; $(2;7)$; $(3;6)$; $(4;5)$; $(5;4)$; $(6;3)$; $(7;2)$; $(8;1)$; $(9;0)$

Il y en a 9

* $a=8$: $a+b+c=16 \Leftrightarrow 8+b+c=16 \Leftrightarrow b+c=8$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(0;8)$; $(1;7)$; $(2;6)$; $(3;5)$; $(4;4)$; $(5;3)$ $(6;2)$; $(7;1)$; $(8;0)$

Il y en a 9

* $a=9$: $a+b+c=16 \Leftrightarrow 9+b+c=16 \Leftrightarrow b+c=7$

Les couples $(b;c)$ possibles sont : $(0;7)$; $(1;6)$; $(2;5)$; $(3;4)$; $(4;3)$ $(5;2)$; $(6;1)$; $(7;0)$. Il y en a 8

N° 4./12

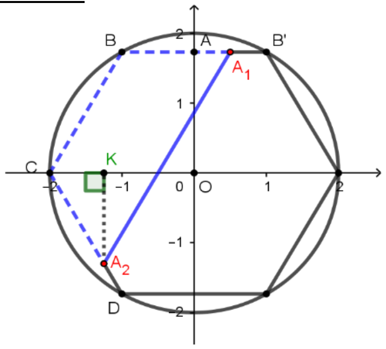
Le plus petit n de ces possibilités est forcément avec $a=1$ car il est multiplié par 10 000. Il faut ensuite prendre le couple $(b;c)$ correspondant avec le plus petit b car il est lui multiplié par 1000. Il s'agit du couple $(7;8)$. Le plus petit n est donc $\boxed{17\,899}$.

Et il y a, si on regroupe tous les a possibles, $3+4+5+6+7+8+9+9+8$ $= \boxed{59 \text{ possibilités}}$ de n.

Exercice n°2

A_1 est le point de départ d'Alice et A_2 est le point d'arrivée d'Alice.
Sur les deux figures, le trajet d'Alice est donné en pointillés bleus.

<u>1er cas :</u> Alice chemine sur trois côtés : le point de départ est situé avant le milieu A d'un côté



On pose $A_1A = x$ avec $x \in [0;1]$.
On en déduit que $CA_2 = 2 - x$.

Le triangle OBB' est un triangle équilatéral (il est isocèle en O, de plus l'angle $\widehat{B'OB}$ mesure $360° \div 6 = 60°$).
$A_1\left(x; \sqrt{3}\right)$ (la hauteur OA d'un triangle équilatéral de côté 2 vaut $\sqrt{3}$)

$$sin(60) = \frac{KA_2}{CA_2} \Leftrightarrow KA_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(2-x) \quad d'où\ y_{A_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)$$

$$cos(60) = \frac{CK}{CA_2} \Leftrightarrow CK = \frac{1}{2}(2-x) \quad d'où\ x_{A_2} = -(2-CK) = -1-\frac{1}{2}x$$

$$A_2\left(-1-\frac{1}{2}x; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}\right)$$

$$A_1A_2 = \sqrt{\left(-1-\frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - 2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x^2 + 3x + \frac{3}{4}x^2 + 12 - 6x}$$

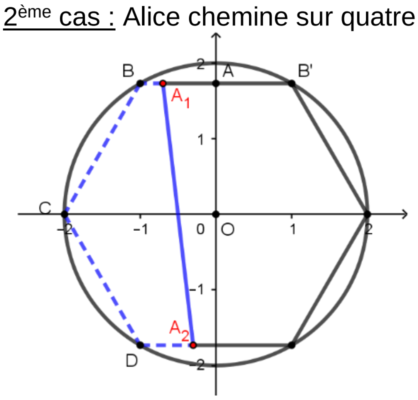
$$A_1A_2 = \sqrt{3x^2 - 3x + 13}$$

f est définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{3x^2 - 3x + 13}$
La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, le sens de variation de f est le même que celui de la fonction u définie sur $[0;1]$ par $u(x) = 3x^2 - 3x + 13$

Cherchons le minimum de la distance A_1A_2 :
Il est obtenu au sommet de la parabole :
$x_S = 0.5 \quad f(0.5) = \sqrt{12.25} = 3.5$

Cherchons le maximum de la distance A_1A_2 :
Il est obtenu pour $x = 0$ ou $x = 1$: il vaut donc $\sqrt{13}$

<u>2ème cas :</u> Alice chemine sur quatre côtés : le point de départ est situé après le milieu A d'un côté



On pose $A_1B = x$ avec $x \in [0;1]$.
On en déduit que $DA_2 = 1 - x$.
$A_1\left(-1+x; \sqrt{3}\right)$
$A_2\left(-x; -\sqrt{3}\right)$

$$A_1A_2 = \sqrt{(2x-1)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$A_1A_2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 13}$$

$g(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 13}$
Cherchons le minimum de la distance A_1A_2 :
Il est obtenu au sommet de la parabole :
$x_S = 0.5 \quad g(0.5) = \sqrt{12}$

Cherchons le maximum de la distance A_1A_2 :
Il est obtenu pour $x = 0$ ou $x = 1$: il vaut donc $\sqrt{13}$

Alice est à une distance en ligne droite comprise entre $\sqrt{12}$ et $\sqrt{13}$ km de son point de départ ; la distance est donnée par l'une des deux fonctions f ou g selon l'endroit de son point de départ sur l'un des côtés de l'hexagone.

BARTOLI Paul et DUCLAUX Colomban
Lycée Français, Zurich
Exercice n°3

Aymeric sera désigné par A, Basile par B et Carl par C.

1) On considère que lors d'un tour, A lance la pièce et s'il ne perd pas, B lance la pièce.

Au premier tour, la probabilité que A perde est de $\frac{1}{2}$ et que B perde est de $\frac{1}{4}$.

La probabilité que A perde au deuxième tour est de $\frac{1}{8}$ et que B perde est de $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite.

A gagne si B perd donc la probabilité que B perde au n-ième tour est $\frac{1}{4^n}$ donc la probabilité que A gagne au n-ième tour est de $\frac{1}{4^n}$.

Donc la probabilité P que A gagne est la somme des probabilités que A gagne à chaque tour. Elle est donc de $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{4^n}$ pour n allant jusqu'à l'infini

Soit $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k - 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - 1$

$\frac{4-4\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}$

$P = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} = \frac{1}{3}$ car $-1<\left(\frac{1}{4}\right)<1$ donc la probabilité de Aymeric gagne la partie est de $\boxed{\frac{1}{3}}$.

2) Tant que B ne perd pas, l'ordre d'un tour est : C lance deux fois la pièce et B lance une fois la pièce.

Lors du premier tour, la probabilité que C perde à son premier lancer est de $\frac{1}{2}$, la probabilité que C perde à son deuxième lancer est de $\frac{1}{4}$ et la probabilité que B perde est de $\frac{1}{8}$.

Dans le cas où B n'a pas perdu au 1er tour, la probabilité que C perde à son premier lancer du 2e tour est $\frac{1}{16}$, la probabilité que C perde à son deuxième lancer du 2e tour est $\frac{1}{32}$ et la probabilité que B perde au 2e tour est $\frac{1}{64}$, et ainsi de suite tant que B ne perd pas au tour précédent.

Donc la probabilité que B soit éliminé au n-ième tour est de $\left(\frac{1}{8}\right)^n$.

Lorsque B est éliminé, c'est la fin du tour et les tours suivants ont pour ordre : C joue puis A joue.

Lors du premier tour suivant l'élimination de B, la probabilité que C perde est de $\frac{1}{2}$ et la probabilité que A perde est de $\frac{1}{4}$. Puis la probabilité que C soit éliminé au 2e tour est $\frac{1}{8}$ et que A soit éliminé au 2e tour est $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite.

On se retrouve donc dans la même configuration que dans la première question avec C à la place de A et A à la place de B.

Après que B perde, la probabilité que C gagne est donc de P.

Soit P_C la probabilité que C gagne la partie.

On a donc $P_C = \frac{1}{8}\times P + \frac{1}{8^2}\times P + \frac{1}{8^3}\times P + \dots + \frac{1}{8^n}\times P$ avec n allant jusqu'à l'infini.

D'où $P_C = P\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{8^n}\right)$ avec n allant jusqu'à l'infini.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{8^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{8}\right)^n - 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{8}} - 1 = \frac{8-8\left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}}{7} - \frac{7}{7}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\dots+\frac{1}{8^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{7} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{7} = \frac{1}{7} \text{ car } -1<\frac{1}{8}<1$$

$$P_C = \lim_{n\to+\infty} P\times\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{7} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{7} = \frac{1}{21}$$

La probabilité que Carl gagne la partie est de $\boxed{\frac{1}{21}}$