Vendredi 22 septembre 2023

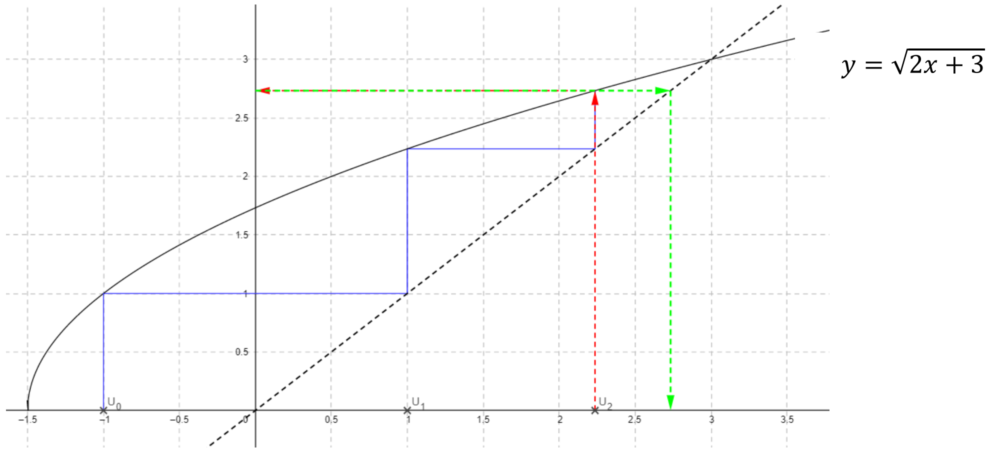
Suites et récurrence	**Corrigé du Contrôle n°1** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : (2 pts)

Représenter sur l'axe des abscisses, ci-dessous, les quatre premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

Laisser les traits de construction



<u>Exercice 2</u> : (4 pts)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

<u>Prédicat</u> : $P(n), \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2\times 0+1} = 2$ donc $u_0 = \frac{2}{2\times 0+1}$ et $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie.

Au rang $k+1$: On sait que $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k}$

On remplace u_k par sa valeur selon l'hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{\frac{2k+1+2}{2k+1}} = \frac{2}{2k+1} \times \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{2}{2(k+1)+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : la proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel.

Vendredi 22 septembre 2023

Exercice 3 : (4 pts)

Démontrer que pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$

Prédicat : $P(n), \forall n \geq 4, n! \geq 2^n$

Initialisation : Pour $n = 4$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $2^4 = 16$, comme $24 \geq 16$ alors $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie.

Au rang $k+1$: D'après l'hypothèse de récurrence $k! \geq 2^k$

On veut montrer que $(k+1)! \geq 2^{k+1}$, or $(k+1)! = k! \times (k+1)$

Ainsi si $k! \geq 2^k$, alors $k!\,(k+1) \geq 2^k \times (k+1)$ soit $(k+1)! \geq 2^k \times (k+1)$

Or $k \geq 4$, donc $k+1 \geq 5 \geq 2$, ainsi $(k+1)! \geq 2^k \times 2 = 2^{k+1}$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 4.

Exercice 4 : (8 pts)

Soit (u_n) une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3000 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n + 500 \end{cases}$

1. Montrer que $u_1 = 2750$ et calculer u_2.

$$u_1 = 0{,}75u_0 + 500 = 0{,}75 \times 3000 + 500 = 2750.$$

$$u_2 = 0{,}75u_1 + 500 = 0{,}75 \times 2750 + 500 = 2562{,}5$$

2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Prédicat : : $P(n), \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_1 = 2750 \leq u_0 = 3000$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $k \geq 0$ tel que $P(k)$ soit vraie.

Au rang $k+1$: Par hypothèse de récurrence

$$u_{k+1} \leq u_k$$

$$0{,}75u_{k+1} \leq 0{,}75u_k$$

$$0{,}75u_{k+1} + 500 \leq 0{,}75u_k + 500$$

$$u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : la proposition est initialisée pour $n = 0$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel et la suite (u_n) est décroissante.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2000$; pour tout entier naturel n.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son terme initial.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2000 = 0{,}75u_n + 500 - 2000 = 0{,}75u_n - 1500 = 0{,}75(u_n - 2000) = 0{,}75v_n$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 2000 = 1000$

b) Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Comme la suite (v_n) est géométrique, alors $v_n = v_0 \times q^n = 1000 \times 0{,}75^n = 1000 \times \frac{3^n}{4^n}$.

Or $v_n = u_n - 2000$ donc $u_n = v_n + 2000 = 1000 \times 0{,}75^n + 2000$.

Exercice 5 : **(2 pts)**

Calculer la somme $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59\,049$ en utilisant une formule. Expliquer le calcul.

$$1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59\,049 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10}$$

C'est la somme d'une suite géométrique de raison 3, de terme initial $u_0 = 1$ et il y a 11 termes.

$S = 1 \times \frac{3^{11}-1}{3-1} = 88\,573$ donc $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59\,049 = 88\,573$