

BACCALAURÉAT BLANC

Jeudi 14 mars 2024

MATHÉMATIQUES

Epreuve de spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1**5 points**

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        u = ...  
    return(u)
```

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- a. Donner v_0 .
- b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
- c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2**5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2; 1; 4)$, $(4; -1; 0)$, $(0; 3; 2)$ et $(4; 3; -2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
 - a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
 - b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3; 3; -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
 - c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2 .
3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
 - d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3**5 points**

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les événements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme »;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.
b. Les événements F et C sont-ils indépendants? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C , notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.
 - a. Quelle est la loi suivie par X ? Donner ses paramètres. Justifier.
 - b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne exactement 5 salariés. Justifier.
 - c. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.
 - d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .
6. Soit n un entier naturel.
On considère dans cette question un échantillon de n salariés.
Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99?

Exercice 4

5 points

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

- Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.
- Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
- Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
- Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3; 4]$.

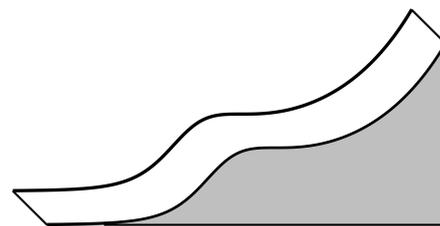
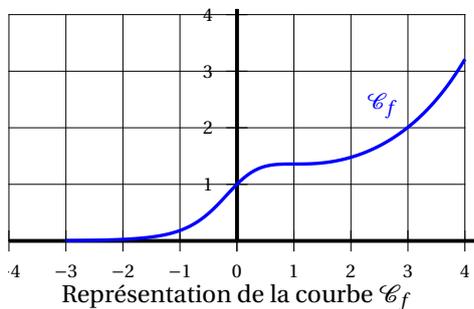
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3; 4]$.
 - Justifier que la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
- Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe \mathcal{C}_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Vue de profil du toboggan

- D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations? Argumenter.
- On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations? ». Justifier.