Vendredi 20 septembre 2024

Dérivation *Convexité*	**Corrigé du Contrôle de mathématiques n°1** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

Exercice 1 : 4 pts

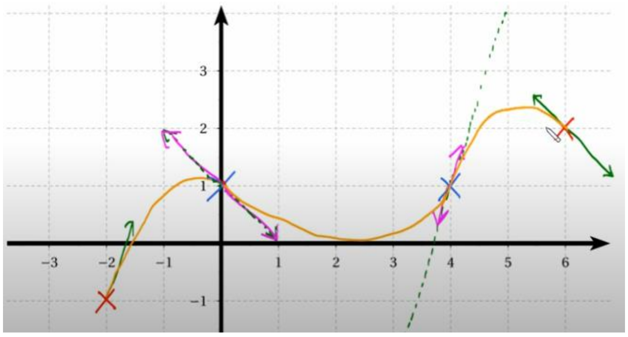
On considère une fonction f définie et dérivable sur [-2 ; 6].
On donne le tableau de variation de la fonction dérivée f'.

x	-2		0		4		6
$f'(x)$	3	↘	-1	↗	3	↘	-1

1. Déterminer la convexité de la fonction f. Justifier les réponses.

Comme la fonction f' est décroissante sur $[-2\,;0] \cup [4\,;6]$ alors f est concave sur $[-2\,;0] \cup [4\,;6]$.
Comme la fonction f' est croissante sur $[0\,;4]$ alors f est convexe sur $[0;4]$.
Comme la fonction change de convexité aux points d'abscisses 0 et 4 alors la courbe admet deux points d'inflexion d'abscisses 0 et 4.

2. Sachant que $f(0) = 1$ et que $f(4) = 1$, tracer une courbe susceptible de représenter f dans le repère suivant :



Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{6x^2 - 8x + 2}$

1. Déterminer son ensemble de définition

La fonction est la composée $g°u$ avec $\begin{cases} u(x) = 6x^2 - 8x + 2 \\ g(X) = \sqrt{X} \end{cases}$

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}+$, donc on doit avoir que, pour tout réel x, $6x^2 - 8x + 2 \geq 0$

On pose $P(x) = 6x^2 - 8x + 2$, on cherche ses racines.

$\Delta = 16 > 0$, donc le polynôme admet deux racines réelles $x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{12} = \frac{1}{3}$ et $x_1 = \frac{8+\sqrt{16}}{12} = 1$

Comme $a = 6 > 0$, alors P est positif sur $]-\infty\,; \frac{1}{3}] \cup [1\,;\ +\infty[$

On en déduit que la fonction est définie sur $]-\infty\,; \frac{1}{3}] \cup [1\,;\ +\infty[$

2. Calculer sa fonction dérivée f'.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{3}[\cup]1\,;\,+\infty[$ car composée de fonction composées et la racine carrée doit être non nulle.

$f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=6x^2-8x+2$ et donc $u'(x)=12x-8$

Ainsi $f'(x)=\frac{12x-8}{2\sqrt{6x^2-8x+2}}=\frac{2(6x-4)}{2\sqrt{6x^2-8x+2}}=\frac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+2}}$

3. Etudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de la fonction f en faisant un tableau de variations.

Une racine carrée est positive donc le signe de f' est le même que celui de $6x-4$.

On résout : $6x-4\geq 0 \iff x\geq\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Ainsi $f'(x)$ est positif lorsque x est supérieur ou égal à $\frac{2}{3}$ et négatif lorsque x est inférieur à $\frac{2}{3}$.

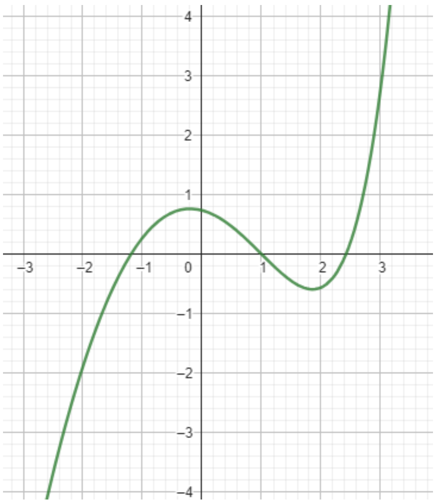
Mais il faut faire attention à l'ensemble de définition de f !!

Récapitulons les informations dans un tableau.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$\searrow$			0	$\nearrow$

<u>Exercice 3</u> : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=2e^{x-1}-x^2-x$$



1. Grâce au graphique, conjecturer la convexité de g.

La fonction semble être concave sur $]-\infty\,;1[$ et convexe sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=2\times 1e^{x-1}-2x-1=2e^{x-1}-2x-1$$

3. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g''(x)$.

La fonction dérivée est composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g''(x)=2e^{x-1}-2$$

4. Etudier la convexité de la fonction g.

Pour étudier la convexité de la fonction g, on étudie le signe de g''.

$g''(x)\geq 0$ lorsque $2e^{x-1}-2\geq 0\iff e^{x-1}\geq 1=e^0\iff x-1\geq 0$ car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$. Et donc ceci est équivalent à $x\geq 1$.

Ainsi $g''(x) \geq 0$ ssi $x \geq 1$ donc g est convexe sur $[1\ ;\ +\infty[$

Et donc $g''(x) \leq 0$ ssi $x \leq 1$ donc g est concave sur $]-\infty\ ;\ 1]$

5. Montrer que g admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées.

La dérivée seconde $g''(x) = 2e^{x-1} - 2$ s'annule et change de signe en $x = 1$, donc la courbe admet un point d'inflexion au point A de coordonnées $(1\ ; g(1) = 0)$

6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A.

L'équation de la tangente en $x = 1$ est : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$$g'(1) = 2e^{1-1} - 2 \times 1 - 1 = -1$$

$$g(1) = 0$$

Donc $y = -1(x-1) + 0 = -x + 1$

En déduire que, pour tout $x \geq 1$: $e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$

Pour $x \geq 1$, la fonction est convexe, donc la courbe se situe au-dessus des tangentes.

Ainsi $g(x) \geq -x + 1 \Leftrightarrow 2e^{x-1} - x^2 - x \geq -x + 1 \ \Leftrightarrow\ e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$