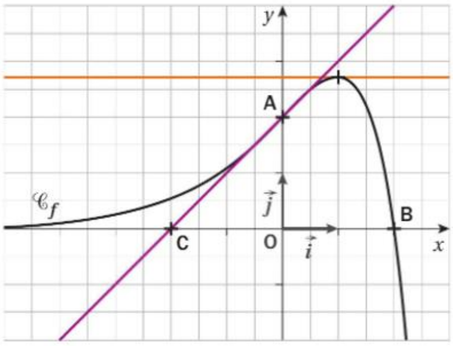
Vendredi 11 octobre 2024

Convexité *Récurrence*	**Contrôle n°2 – 2h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : 10 pts



1. Dans le plan muni d'un repère, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
On a placé les points $A(0\,;2)$, $B(2\,;0)$ et $C(-2\,;0)$.
On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe C_f
- La droite (AC) est tangente en A à C_f
- La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique, sans justification.

1) Indiquer les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$. Justifier.
2) Donner une équation de la tangente en A à C_f
3) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et l'intervalle sur lequel elle semble concave.

2. Dans cette question, on cherche à vérifier, par le calcul, les résultats lus graphiquement dans la question 1.

On admet que la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2-x)e^x$$

1) Calculer la valeur de $f(0)$.
2) Déterminer la dérivée de la fonction f et calculer $f'(1)$
3) Déterminer, par le calcul, une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5) Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout nombre réel x.
6) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
7) Préciser si la courbe C_f admet un point d'inflexion. Justifier.

<u>Exercice 2</u> : 3 pts
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$$

Tournez la page svp

Exercice 3 : 7 pts

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage un protocole de traitement d'une maladie. L'objectif est d'étudier l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Le protocole consiste à injecter au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toute les heure une dose de 1,8 mg.

On suppose que lorsqu'une heure s'est écoulée après injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, le terme u_n désigne la quantité de médicament, exprimé en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure.

On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer la quantité u_1 de médicament présente dans le sang du patient après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$

3. Montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1} < 6$ pour tout entier naturel n.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n par $v_n = 6 - u_n$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 dont on précisera le terme initial.

5. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

7. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicaments présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer, avec la calculatrice, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.