Suite et récurrence

Principe de récurrence :

P(n) désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **L'Etape d'initialisation** : P(n) est vrai pour un entier n_0 ;
- **L'Etape d'hérédité** : pour tout entier $k \geq n_0$, "P(k) est vraie" implique "P(K + 1) est vraie"

Alors on peut conclure que P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Etapes d'une démonstration par récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ fixé :

1-Prédicat :

C'est ici que l'on inscrit bêtement ce que l'on cherche à démontrer sous la forme :

P(n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, *-propriété à démontrer-*

2-Initialisation :

C'est dans l'initialisation que l'on va prouver que cette même propriété à démontrer est au moins vraie pour une première valeur n_0 . Cela se présente sous la forme :

Pour n=0, *-calcul de P_0-* , donc P_0 est vraie

3-Hérédité :

La fameuse hérédité, on y suppose un entier k ($k \geq n_0$) quelconque ou P_k est vraie, c'est-à-dire qu'on suppose que notre prédicat est bien vrai à un point, et ce point est l'indice k.

A partir de k, on cherche à démontrer que P_{k+1} est vraie, donc qu'un rang après le rang k qu'on suppose vraie, notre supposition soit encore vraie :

→ Soit en utilisant directement P_k → Soit en "construisant" P_{k+1} → Soit en "injectant" P_k à P_{k+1}

4-Conclusion :

Si tout est bien vérifié, on peut donc conclure que la proposition P_n est vraie pour tout entier n avec $n \geq n_0$ sous la forme :

La proposition est initialisée au rang n = 0 et est héréditaire donc (U_n) est *-propriété à démontrer-*

Définition : sens de variation d'une suite

Une suite (U_n) est croissante si pour tout entier naturel n : $U_n \leq U_{n+1}$.

Une suite (U_n) est décroissante si pour tout entier naturel n : $U_n \geq U_{n+1}$.

Une suite est dite monotone si elle est soit (toujours) croissante, soit (toujours) décroissante.

Une suite est dite constante si, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n$

Définition : suite majorée, suite minorée

On dit qu'une suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ est :

- Majorée s'il existe M ∈ ℝ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ on dit que M est un majorant de (U_n).
- Minorée s'il existe M ∈ ℝ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$ on dit que M est un minorant de (U_n).
- Bornée si elle est à la fois majorée et minorée.