Chapitre III : Primitives et équations différentielles

Primitives de fonction

Une primitive d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que F'=f
F est une primitive de f ssi F est solution de l'équation différentielle y'=f

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies sur I par G(x)=F(x)+k où k est un réel.

Calcul des primitives

Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln x$	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \exp x$	$f(x) = \exp x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$

Composition de fonctions

Les théorèmes opératoires sur le calcul de dérivées permettent d'établir le tableau suivant sur les primitives. On considère que *u* désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	u et v dérivables sur I
$\lambda u'$, avec λ réel	λu	
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si n est négatif, alors $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	pour $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J

Equation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Elle se présente sous la forme d'une relation entre la fonction et ses dérivées successives et la variable.

- Du type y' = ay

Soit a ∈ $\mathbb{R}^*$, les solutions de l'équation différentielle (E) y'=ay sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$x \rightarrow Ke^{ax}$ où K est une constante réelle

Pour tous x_0 et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction f solution de l'équation telle que $f(x_0) = y_0$

- Du type y' = ay + b

Si a ≠ 0, les solutions de l'équation différentielle (E) y'=ay + b sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

$x \rightarrow Ce^{ax} + y_0$ où C est une constante réelle et y_0 est la fonction constante $y_0(x) = -\frac{b}{a}$

Si a = 0, les solutions de l''équation différentielle (E) y'=ay + b = b sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$x \rightarrow bx + c$ avec c ∈ $\mathbb{R}$

Pour tous x_0 et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction f solution de l'équation telle que $f(x_0) = y_0$

- Du type y' = ay + Φ

Les solutions sont de la forme :

$y(x) = Ke^{ax} + P$ où P est une solution particulière de (E)

Autrement dit : y(x)=solutions de ESSM + solution particulière de (E)