Vendredi 15 novembre 2024

Equations différentielles *Primitives*	**Corrigé du Contrôle n°3 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : 6 pts

a) Calculer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x^2 + 4x - 3)e^{x^3+6x^2-9x} = \frac{1}{3}(3x^2 + 12x - 9)e^{x^3+6x^2-9x}$

  f est de la forme $\frac{1}{3}u'e^u$ de primitive $\frac{1}{3}e^u$

Donc toutes ses primitives sont : $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+6x^2-9x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

- $g(x) = \frac{14x+3}{(7x^2+3x-4)^2}$ g est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ de primitive $-\frac{1}{u}$

Donc toutes ses primitives sont : $G(x) = -\frac{1}{7x^2+3x-4} + k, k \in \mathbb{R}$

- $h(x) = \frac{4x+4}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{2(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x}}$ h est de la forme $2\frac{u'}{\sqrt{u}}$ de primitive $2 \times 2\sqrt{u}$

Donc toutes les primitives de h sont : $H'(x) = 4\sqrt{x^2+2x} + k, k \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la primitive F de la fonction $f(x) = -6e^{5x} + 7x^6 - 5x + 1$ telle que $F(0) = 4$

L'ensemble des primitives de f sont : $F(x) = -\frac{6}{5}e^{5x} + x^7 - \frac{5}{2}x^2 + x + k, k \in \mathbb{R}$.

On cherche la primitive telle que $F(0) = 4$, on a $F(0) = -\frac{6}{5}e^{5\times 0} + 0^7 - \frac{5}{2} \times 0^2 + 0 + k = 4$

Donc $-\frac{6}{5} + k = 4$ et $k = 4 + \frac{6}{5} = \frac{26}{5}$

Ainsi la primitive est : $F(x) = -\frac{6}{5}e^{5x} + x^7 - \frac{5}{2}x^2 + x + \frac{26}{5}$

<u>Exercice 2</u> : 4 pts

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

a) $5y' + 7y = 0$ b) $2y' - 5y = 3$

a) $5y' + 7y = 0$

$$5y' + 7y = 0 \iff y' = -\frac{7}{5}y$$

C'est une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{7}{5}$

L'ensemble des solutions est : $y(x) = Ke^{-\frac{7}{5}x}, K \in \mathbb{R}$.

b) $2y' - 5y = 3$

$$2y' - 5y = 3 \iff y' = \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont de la forme : $y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Ainsi les solutions de l'équation sont : $y(x) = Ke^{\frac{5}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}$

Soit $y(x) = Ke^{\frac{5}{2}x} - \frac{3}{5}, K \in \mathbb{R}$

<u>Exercice 3 :</u> 5 pts

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à une température de 100°C.
Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20°C.
Théo lui rétorque que quand il sera à 37°C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}04y = 0{,}8$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) puis donner sa solution particulière g vérifiant la condition initiale $g(0) = 100$.

- On cherche les solutions de l'équation homogène associée : $y' = -0{,}04y$
  Les solutions sont $y(x) = Ke^{-0{,}04x}, K \in \mathbb{R}$
- On cherche une solution particulière constante $y = C$ de (E), elle vérifie :
  $0 + 0{,}04C = 0{,}8$ donc $C = 20$
- Les solutions de (E) sont $y(x) = Ke^{-0{,}04x} + 20, K \in \mathbb{R}$
- On cherche la solution g qui vérifie $g(0) = 100$, on résout : $Ke^{-0{,}04x} + 20 = 100$
  Donc $K = 80$
  Ainsi $g(t) = 80e^{-0{,}04x} + 20$

2. En utilisant l'expression de g(t) trouvée :

a) Quelle est la température du plat au bout de 10 min ? $g(10) = 80e^{-0{,}04\times 10} + 20 \approx 73{,}6$
La température du plat au bout de 10min est d'environ 73,6°C.
b) Quel est le temps nécessaire pour obtenir la température de 37°C ? La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre cette température ?
Résultat obtenu à la calculatrice ou par calcul direct.
On résout $80e^{-0{,}04x} + 20 = 37$ soit $e^{-0{,}04x} = \frac{17}{80}$ donc $-0{,}04x = \ln\left(\frac{17}{80}\right)$ et $x = -\frac{1}{0{,}04}\ln\left(\frac{17}{80}\right) \approx 38{,}7$
Il faudra attendre environ 38 min 42s pour que le plat soit à 37°C.
La grand-mère avait assez bien évalué le temps d'attente.

<u>Exercice 4 :</u> 5 pts

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$

1. Déterminer le réel a tel que $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

La fonction $p(x) = ae^{2x}$ a pour dérivée $p'(x) = 2ae^{2x}$, elle est solution de l'équation (E) donc

$$2ae^{2x} + 3ae^{2x} = e^{2x}$$

On en déduit que : $5ae^{2x} = e^{2x}$ donc $5a = 1$ et $a = \frac{1}{5}$

Ainsi la fonction $p(x) = \frac{1}{5}e^{2x}$ est solution particulière de l'équation (E).

2. Déterminer les solutions de l'équation sans seconde membre

On cherche les solutions de l'équation : $y' + 3y = 0$ soit $y' = -3y$
Les solutions sont : $y(x) = Ce^{-3x}, C \in \mathbb{R}$

3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

L'ensemble des solutions de (E) sont de la forme $y(x) = sol\ de\ l'ESSM + sol\ particulière.$
Donc $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$

4. Déterminer la solution f de cette équation (E) telle que $f(0) = 1$.

On cherche la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$

Donc $Ce^{-3\times 0} + \frac{1}{5}e^{2\times 0} = 1$ soit $C + \frac{1}{5} = 1$ donc $C = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Ainsi la solution est : $f(x) = \frac{4}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$