Vendredi 6 décembre 2024

Fonction logarithme népérien	**Corrigé du Contrôle de mathématiques n°4 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>Exercice 1</u> : 10 pts

a) Résoudre l'équation : $\ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2)$

<u>1. Ensemble de définition de l'équation</u>

L'équation est définie lorsque : $\begin{cases} x > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \end{cases}$ donc $D_{eq} =]4\ ;\ +\infty[$

<u>2. Elimination des logarithmes</u>

$$\ln(x) - 2\ln(x-4) = -\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x) + \ln(2) = 2\ln(x-4)$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) = \ln((x-4)^2)$$
$$\Leftrightarrow 2x = (x-4)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 - 2x = 0$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

<u>3. Résolution de la nouvelle équation</u>

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$\Delta = 100 - 64 = 36 > 0$

$x_1 = \frac{10-6}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{10+62}{2} = 8$

<u>4. Solutions de l'équation</u>

On sait que l'ensemble de définition de l'équation est $]4\ ;\ +\infty[$

Comme $2 \notin]4\ ;\ +\infty[$ et que $8 \in]4\ ;\ +\infty[$

Alors l'équation admet une solution : $S = \{8\}$

b) Exprimer en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ *et* $\ln(5)$

$$A = \ln(15) - 3\ln(8) \quad B = ln\left(\frac{50}{3e}\right) + \ln(60)$$

$A = \ln(15) - 3\ln(8) = \ln(3\times 5) - 3\ln(2^3) = \ln(3) + \ln(5) - 3\times 3\ln(2) = \ln(3) + \ln(5) - 9\ln(2)$

$B = ln\left(\frac{50}{3e}\right) + \ln(60) = \ln(50) - \ln(3e) + \ln(60) = \ln(2\times 5^2) - \ln(3) - \ln(e) + \ln(2^2\times 3\times 5)$

$B = \ln(2) + 2\ln(5) - \ln(3) - 1 + 2\ln(2) + \ln(3) + \ln(5) = 3\ln(2) + 3\ln(5) - 1$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}99$$

$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}99$ ssi $1 - 0{,}99 > \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ssi $\ln(0{,}01) > ln(\left(\frac{3}{4}\right)^n)$ ssi $\ln(10^{-2}) > nln\left(\frac{3}{4}\right)$

Ssi $\frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} < n$ car $\frac{3}{4} < 1$ donc $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ ainsi $n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 16{,}007$

Donc le plus petit entier naturel est $n = 17$.

d) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = ln(-6x^2 + 5x - 1) \qquad\qquad g(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$$

- $f(x) = ln(-6x^2 + 5x - 1) = ln(u)$ avec $u(x) = -6x^2 + 5x - 1$ donc $u'(x) = -12x + 5$

On utilise la formule : $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Donc $f'(x) = \frac{-12x+5}{-6x^2+5x-1}$

- $g(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2)} = \sqrt{u}$ avec $u(x) = \ln(1 + x^2)$ donc $u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

On utilise la formule : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)}{2\sqrt{\ln(1 + x^2)}} = \frac{2x}{2(1 + x^2)\sqrt{\ln(1 + x^2)}} = \frac{x}{(1 + x^2)\sqrt{\ln(1 + x^2)}}$$

Exercice 2 : 10 pts

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction f par : $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$

1. Pourquoi f est-elle dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$?
   La fonction f est la composée de $\ln(x)$ et de x^2 deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f, démontrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2} = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 + \ln(x) \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln(x)\times 2x}{x^4} = \frac{x-2x-2xln(x)}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln(x))}{x^4} = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. Résoudre l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On résout : $-1 - 2\ln(x) > 0$ soit $\ln(x) < -\frac{1}{2}$ en passant à l'exponentielle, qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient : $x < e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Donc pour tout $x \in]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{e}}[$, $-1 - 2\ln(x) > 0$

4. En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

On sait que

- $x^3 > 0$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

- $-1 - 2\ln(x) > 0$ pour $x \in]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{e}}[$

On obtient le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = e \times \frac{1}{2} = \frac{e}{2}$

5. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

On cherche à résoudre $f(x) = 0$ soit $\frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0$

Un quotient est nul lorsque le numérateur et nul et le dénominateur est non nul.

On a : $1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$

Ce qui prouve que la courbe coupe l'axe des abscisses en un unique point de coordonnées $(e^{-1}\,;0)$

6. En déduire le tableau de signes de la fonction f.

D'après le tableau de variations et sachant que $f(e^{-1}) = 0$

On en déduit que $f(x) > 0$ sur $]e^{-1}\,;\,+\infty[$ et $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,e^{-1}[$

7. Montrer que la fonction F, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$ est une primitive de f.

Si $F'(x) = f(x)$ alors F est une primitive de f.

$$F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x} = \frac{u}{v}$$

Avec $\begin{cases} u(x) = -2 - \ln(x) \\ v(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

On utilise la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

Donc $F'(x) = \frac{-\frac{1}{x}\times x - (-2-\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{-1+2+\ln(x)}{x^2} = \frac{1+\ln(x)}{x^2} = f(x)$

Ainsi F est bien une primitive de f.